공기조화 냉동공학회 2000동계학술발표회 논문집 pp. 596~600

2000-W-101

CIP법을 이용한 캐비티 내의 유동 및 열전달 해석

김 상 태†, 홍 희 기*, 김 찬 중**

서울대학교 대학원 기계항공공학부, *경희대학교 기계산업시스템공학부, **서울대학교 기계항공공학부

Analysis of the flow and heat transfer in square cavity using CIP method

Sangtae Kim†, Hiki HONG* and Charn-Jung KIM**

ABSTRACT: In this paper, we discuss CIP method, which can treat the compressible/incompressible problem and multi-phase problem. Although CIP method was developed for the hyperbolic equation, we can apply this method to the general equations by using C-CUP. To verify the effectiveness of CIP method, we solve the lid-driven cavity and natural convection in a square cavity problem by using this method. The applicability and effectiveness of the proposed method is discussed with the obtained numerical results. We analyze the pressure boundary condition and CFL condition for the validity and stability.

Key words: CIP, Cavity(캐비티), Natural convection(자연대류), Heat transfer(열전달), CFL condition (CFL 조건)

기호 설명

H : 캐비티의 한 변의 길이

u : x-방향 속도

v : y-방향 속도

t : 시간 [s]

$\widetilde{p}$: 무차원 압력, $(p-p_0)/\rho u^2$

$\widetilde{T}$: 무차원화 온도

$\overline{\mathrm{Nu}_0}$: 벽면에서의 평균 Nu수, $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}$

Pr : Prandtl 수, ν/α

Gr : Grashof 수, $g\beta\Delta TH^3/\nu^2$

Ra : Rayleigh수, GrPr

n : n 번째 time step

** : 비대류 중간 단계

* : 비대류 최종 단계

상첨자

† Corresponding author

Tel. : +82-2-880-1656

E-mail : bizzarel@snu.ac.kr

1. 서론

지금까지 수치해석 분야는 컴퓨터의 발달과 함께 비약적으로 발전해왔다. 수치해석 분야는 열유체공학 분야를 비롯한 여러 분야에서 실험만으로 극복될 수 없는 여러 현상에 대해 해석할 수 있는 대안으로 앞으로도 기대를 모으고 있는 분야이다. 하지만 아직 다상 열 유동이나 상변화 해석, 자유표면 문제 등에 있어서는 많은 어려움이 존재하여 이를 해석하기 위한 새로운 기법의 개발이 요구되는 현실이다.

이러한 상황에서 Yabe에 의해 파동방정식의 해석해를 이용한 새로운 방법인 CIP(Cubic Interpolated Propagation)법이 개발되었다. CIP법은 원래 쌍곡선형 방정식에 대한 해법이지만 적절한 조작을 통해 열 유체 지배방정식의 해석에

도 사용할 수 있다. CIP법의 기본적인 특징은 지배방정식을 대류항과 비대류항으로 분리한 후, 비대류항은 일반적인 차분법을 이용하고 대류항에 대해서 3차 스플라인 함수를 이용하여 해를 구함으로써 안정적이고 정확한 해를 얻어내는 것이라 할 수 있다.

현재, CIP법은 압축성, 비압축성 문제에 대한 통일 해법인 동시에 기체, 액체, 고체가 혼재되어 있는 문제에 대해 통합적으로 접근할 수 있는 해법이다.[1] 따라서 CIP법은 SIMPLE계열의 해법으로는 쉽게 해결할 수 없는 이동경계문제, 자유표면문제, 연속주조와 같은 이동 상변화문제 등을 해결할 수 있는 대안으로 기대를 모으고 있다.

본 논문에서는 본격적인 응용을 시도하기 전에 우선 검증된 문제를 통해 CIP법의 타당성에 대해 알아보도록 한다. CIP법의 타당성과 유용성을 알아보기 위하여 유동 해석과 열전달 해석의 대표적인 예제인 Lid-Driven Cavity 문제와 정사각 Cavity 내의 자연대류 문제를 CIP 법을 이용하여 해석해보고, 그 결과를 기존의 연구결과와 비교분석하여 CIP 법의 타당성 여부와 특징을 파악해 보기로 한다. 특히 타당한 결과를 도출하기 위한 경계 조건의 부여방법 및 계산결과의 안정성을 위한 조건에 대해 분석한다.

2. CIP법과 C-CUP법

2.1 CIP법

CIP법은 일반적인 쌍곡선형 방정식을 풀기 위한 기법이다. CIP법은 수치확산이 적고 간결하며 다차원으로의 확장이 용이한 장점을 지니고 있다. 우선 여기서는 간단한 1차원의 경우를 가지고 CIP법의 원리를 설명하겠다.[2],[3]

다음과 같은 1차 파동방정식을 생각해보자.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

위에 표현된 1차원 파동방정식 (1)의 해석해는 다음과 같다.

$$\phi(x, t+\Delta t) = \phi(x - c\Delta t, t) \qquad (2)$$

이는 수치해석에서 다음과 같이 표현된다.

$$\phi^{n+1} \equiv \phi(x_i, t+\Delta t) \cong \phi(x_i - c\Delta t, t) \qquad (3)$$

그러나 우리는 불연속적인 격자점 위의 값만을 알고 있기 때문에 보간을 통해 격자점 사이의 함수값을 근사할 필요가 있다. 여기서 1차나 2차 다항식을 이용한 보간는 수치확산이 크기 때문에 CIP법에서는 보다 정확한 해를 얻을 수 있는 3차 스플라인 함수를 이용하게 된다.

$$F_i(x) = a_i X^3 + b_i X^2 + \phi_i' X + \phi_i, \qquad (4)$$
$$(X = x - c\Delta t)$$

일반적인 스플라인 함수의 2차 도함수의 연속성을 만족시키는 조건 대신 CIP 법에서는 식(1)을 공간미분하여

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + c\frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

을 얻는데, 이 식은 식(1)과 동일한 형태이므로

$$\phi'^{n+1} \equiv \phi'(x_i, t+\Delta t) \cong \phi'(x_i - c\Delta t, t) \qquad (6)$$

를 이용할 수 있다. 따라서 2개의 격자점에서 각각의 함수값과 공간미분 값을 이용하면 총 4개의 조건이 생겨 스플라인 함수의 계수를 구할 수 있게 된다. 이처럼 각 격자점에서의 값뿐만 아니라 공간미분값까지 기억하고 이용하는 것은 CIP법의 특징 중의 하나이다.

만일 c가 상수가 아닌 경우에도 c가 일정하다고 가정할 만큼 충분히 짧은 시간을 고려하면 CIP법을 이용할 수 있다. Fig 1에서는 여러 보간 방법을 이용하여 사각파의 이동을 계산한 결과를 나타내었다.

CIP법의 2차원으로의 확장은 비교적 간단하며 2차원에 대한 파동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

이 경우에는 (i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)

의 네 점($u<0$, $v<0$인 경우)에서의 ϕ값과 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$를 이용하여 3차 스플라인 함수를 구하면 1차원과 마찬가지의 방법을 이용할 수 있다.[4]

2.2 C-CUP법

CIP법은 기본적으로 쌍곡선 방정식을 위한 해법이다. 따라서 이를 일반적인 열유체 방정식에 확장하기 위해서는 약간의 조작이 필요한데 이를 C-CUP(CIP-Combined Unified Procedure)법이라고 한다. C-CUP법은 서론에서 언급한 것처럼 지배방정식을 비대류 단계와 대류 단계로 나누어 계산을 수행하게 된다. 지배방정식의 일반형을 다음과 같다.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{G} \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = (\rho, \boldsymbol{u}, p)$$

식(8)로 표현된 방정식은 다음과 같이 대류항과 비대류항으로 나눌 수 있다.

$$\text{비대류 단계} : \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = \boldsymbol{G} \qquad (9)$$

$$\text{대류 단계} : \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Phi} = 0 \qquad (10)$$

우선 비대류 단계를 일반적인 차분법을 이용하여 이산화한 후, 이를 양해법으로 계산한다. 그 후 비대류 단계에서 구해진 값을 이용하여 3차스플라인 함수를 구한 후 CIP법을 이용하여 대류 단계를 계산하여 결과를 얻으면 한 time step이 끝나게 된다.

실제의 계산 과정에서는 다음과 같은 압력에 대한 포와송방정식을 얻게 된다.[3]

$$\frac{\nabla^2 p^{**}}{\rho^n} = \frac{p^{**} - p^n}{\gamma p^n \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{u}^*}{\Delta t} \qquad (11)$$

이 식을 풀어 압력을 구한 후 이를 이용하여 속도를 구하게 된다.

2.3 압력 경계 조건의 처리

(11)의 포와송 방정식을 풀기 위해서는 경계에서의 압력을 따로 처리할 필요가 생긴다. 속도의 경우 벽면의 속도가 명확히 알려져 있으므로 경계 조건을 처리하는 데 별 어려움이 없지만, 압력의 경우 명확한 경계조건이 없기 때문에 문제가 발생한다. 따라서 여기서는 벽면에서 운동량 방정식을 고려했을 때 얻을 수 있는 식

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} \qquad (12)$$

을 이용하여 압력의 경계의 값을 처리하였다[5].

즉, Fig. 2 에서와 같이 벽면 바깥쪽에 가상의 $p_{i-1,j}$ 을 고려한 후 식(12)를 이용하면

$$p_{i-1,j} = p_{i,j} - 2\mu \frac{u_{i+1/2,j}}{\Delta x} \qquad (13)$$

와 같은 방법으로 $p_{i-1,j}$ 을 구할 수 있다. 이와 같이 구한 압력을 경계조건으로 사용하면 내부의 압력을 구할 수 있다.

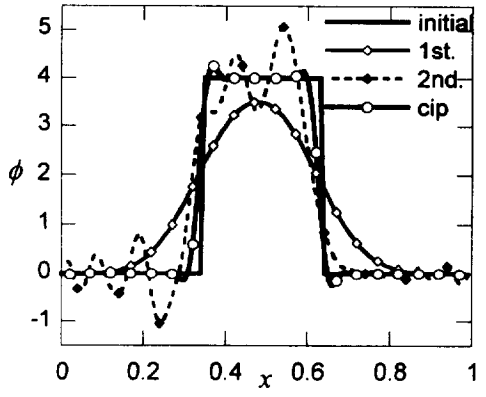

Fig. 1 After 1000 time steps, $u\Delta t/\Delta x = 0.1$.

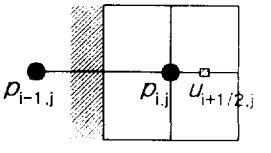

Fig. 2 Pressure boundary condition

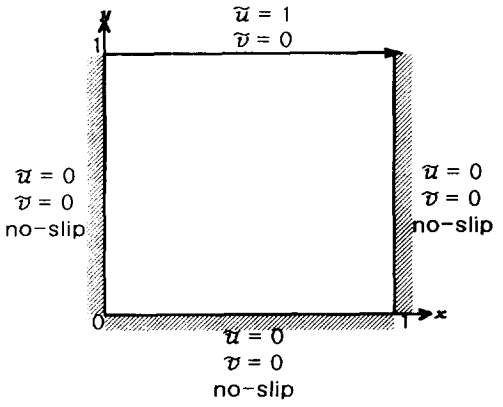

Fig. 3 Model for driven cavity.

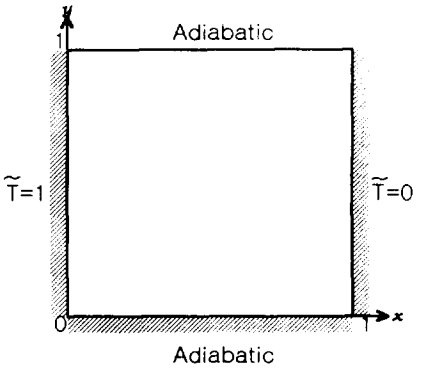

Fig. 4 Model for natural convection

3. 계산 결과

지금까지 설명한 CIP법을 이용하여 실제로 여러 문제에 대해 해석해보고 그 결과를 기존의 방법을 통해 얻은 결과와 비교해 봄으로써 CIP법의 유효성과 특징에 대해 알아본다. 이때, 격자계는 균일 격자계를 이용하였으며 지배방정식은 앞서 설명한 바와 같이 2단계로 나누어 계산하였다.

3.1 Lid-Driven Cavity

이 문제에서는 Fig. 3과 같이 정사각형 용기의 좌우 면과 아랫면이 고정된 벽이고 윗면이 일정 속도로 이동하게 된다. 그로 인해 발생하는 내부의 유동장을 해석하였으며 계산에 이용된 모델과 계산 조건은 Fig. 3에 나타내었다.

Re수가 400, 1000 인 경우에 대해서 CIP법을 이용하여 해석한 결과를 Ghia[6]의 결과와 비교하였으며 이를 Fig. 5 에 나타내었다. CIP법은 비정상문제를 해석할 수 있지만, 여기서는 정상상태에 도달했다고 판단한 시점에서의 결과를 가지고 비교하였으며 기존의 연구와 일치하는 결과를 얻을 수 있었다.

3.2 Cavity 내의 자연대류

Cavity 내의 자연 대류 문제에 대한 조건은 Fig. 4에 나타내었듯이 정사각형 용기 내의 좌측은 무차원화된 온도, $\tilde{T}$ = 1이고 우측은 $\tilde{T}$ = 0 이다. 그리고 윗면과 아랫면은 단열되어 있다. 이때의 내부 온도장을 Ra수가 10^3, 10^4, 10^5, 10^6인 경우에 대해 해석하였으며 그 결과는 Fig. 6과 Table 1 에 나타내었다.

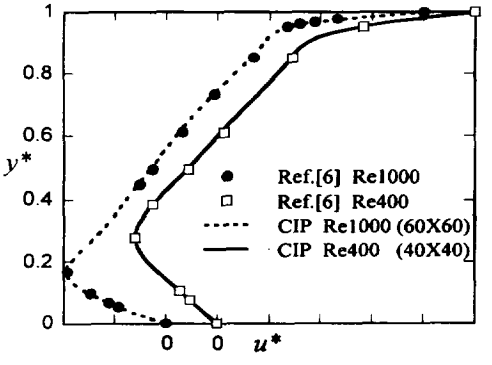

Fig. 5 Velocity profile at x = 0.5

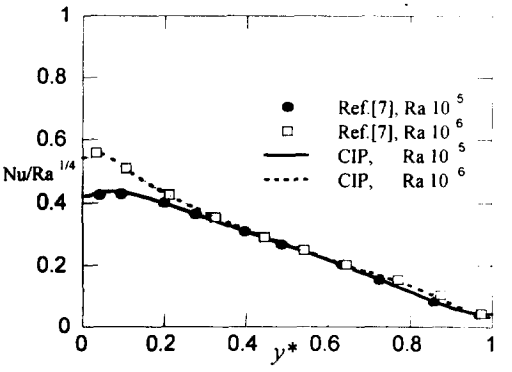

Fig. 6 Wall-heat transfer for air (Pr=0.71)

3.3 Δt 의 영향

기본적으로 CIP법은 양해법을 사용한다. 양해법은 이미 알려져 있듯이 Δt 의 영향을 받으며 계산결과의 안정성을 위한 조건으로 CFL 조건 ($\left|c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1$) 이 제시된다. 하지만 본 연구에서는 보다 정확한 결과를 얻기 위해서는 가급적 CFL 수를 작도록, 즉 Δt를 작게 해야 함을 알 수 있었다. Fig. 7 에는 Lid-Driven Cavity의 해석에서 CFL 수의 변화에 따른 영향을 나타내었다. 그림을 보면 알 수 있듯이 CFL수가 작아질수록 더욱 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 즉, CFL 조건을 만족하는 Δt라 해도 전혀 다른 결과를 보일 수 있으며 Δt를 줄여도 더 이상 차이가 보이지 않을 때, 그 결과를 타당한 결과라 볼 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 Lid-Driven Cavity 문제와 Cavity 내의 자연대류 문제를 CIP법을 이용하여 해석해 보았으며 다른 해법을 사용한 기존의 연구결과와 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 특히 압력 경계조건과 Δt의 영향을 명시하여 향후 복잡한 문제의 응용이 용이하도록 하였다. CIP법은 격자점 내의 값의 분포를 3차식으로 보간하기 때문에 적은 수의 균일 격자만으로도 정확한 결과를 얻을 수 있다는 점을 들 수 있을 것이다. 그러나 양해법을 사용하는 관계로 시간간격, Δt 의 크기에 크게 의존하며 결과적으로 다른 기법에 비해 계산 시간이 오래 걸린다는 단점이 존재한다. CIP법의 진정한 장점은 압축성, 비압축성 문제를 통합적으로 풀 수 있다는 데 있는 만큼 차후의 연구에서는 이를 활용하여 자유표면 문제, 용융문제 등을 해석해볼 수 있을 것이다.

Table 1 $\overline{Nu_0}$ distribution at left wall

Ra	$\overline{Nu_0}^*$	Grid	$\overline{Nu_0}$
10^3	1.117	30×30	1.120
10^4	2.238	40×40	2.251
10^5	4.509	60×60	4.543
10^6	8.817	80×80	8.842

*To compare with the results from Henkes[7].

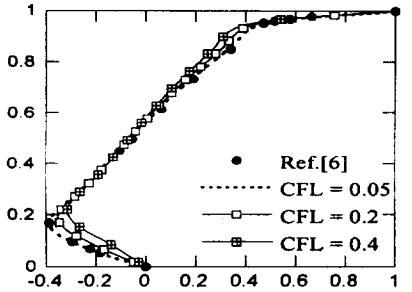

Fig. 7 The influence of CFL No. at Re 1000

참고문헌

1. T.Yabe, 1997, Unified Solver CIP for Solid, Liquid and Gas, published in Computational Fluid Dynamics Review, pp.1-16.
2. T.Yabe, 1991, A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, Computer Physics Communications 66 pp. 219-232
3. Myong, H.K., 1999, Computational Thermo-fluid Dynamics, Munundang.
4. T.Yabe, T.Ishikawa, P.Y.Wang, 1991, A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. Two- and three-dimensional solver, Computer Physics Communications 66 pp. 233-242
5. 保原 充, 數値流體力學, 基礎と應用, 大宮司久明編, 東京大學出版會
6. U.Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, 1982, High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, Journal of Computational Physics 48, pp 387-411.
7. R. A. W. M. Henkes and C. J. Hoogendoorn, 1993, Scaling of the laminar natural-convection flow in a heated square cavity, Int. J. Heat Transfer Vol.36. No. 11, pp. 2913-2925.
8. G. DE Vahl Davis, 1983, Natural Convection In A Square Cavity: A ComParison Exercise, International Journal For Numerical Methods In Fluids, Vol. 3 , pp. 227-248.