

CIP 법을 이용한 다상 이동경계면의 거동해석

(Analysis of multi-phase moving boundary using CIP method)

박준홍* (경희대학교 대학원), 홍희기 (경희대학교 기계공학과), 이상렬(한전전력연구원)

J.H. Park* (KyungHee Univ., Graduate School), Hiki Hong (KyungHee Univ., Dept. of Mechanical Engineering), Sang-Ryoul Lee(KEPRI)

Key words: CIP method, C-CUP method, cavity flow, free surface, multi-phase moving boundary

Abstract: The CIP(Cubic-Interpolated Propagation) method which can solve together compressible and incompressible fluid is used to calculate multi-phase moving boundary. As test problems, C-CUP(CIP-Combined Unified Procedure) was applied to cavity flow and broken dam, which have been verified by lots of numerical techniques and experiments. In the cavity flow, the distribution of velocity calculated by the CIP method shows a good agreement with that of SIMPLE. In the simulation on collapsing process of dam, exact and sharp boundary was obtained on flowing water, although simple boundary conditions are used only on the rectangular region not water-air interface.

1. 서론

다상 열유동 및 상변화현상을 수치적으로 해석하기 위한 시도로 여러 가지의 수치기법들이 제시되어 왔다. 다상 열유동 및 상변화현상은 물질의 상변화와 동시에 급격한 밀도변화가 수반되는 경우 압축성 유체와 비압축성 유체의 동시처리가 반드시 필요하다. 압축성 유체와 비압축성 유체의 동시처리를 처음 시도한 수치기법으로는 Harlow 와 Amsden⁽¹⁾한 ICE(Implicit Continuous Eulerian)법을 들 수 있다. 이 방법은 지배방정식을 보존형 형태로 유지하면서 압축성과 비압축성 유체를 동시처리하기는 했으나, 현재까지 특별한 진보가 없이 개발단계에 머무르고 있다. SIMPLE 계열의 유한체적법은 압축성 유체와 비압축성 유체의 동시처리가

곤란하며, 서로 다른 상 경계가 이동할 때에는 날카로운 경계면이 퍼져나가는 수치확산이 발생하는 단점이 있다. 유한체적법과 연계하여 사용되는 VOF(Volume of Fraction)법⁽²⁾은 인접 검사체적 사이의 유동을 고려하나 3 차원으로의 확장이 힘들고 기하학적인 형상이 복잡할 경우에는 부정확한 결과가 나온다. ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian)법은 상이한 물질의 경계를 정확하게 포착할 수 있는 장점은 있으나, 파도가 부서지는 것과 같이 경계가 분리되는 현상이 발생할 때는 사용이 부적합하다. 이와 같이 여러 가지 수치기법들이 제시되었음에도 다상 열유동 및 상변화현상의 해석에 대하여 완전하다고는 할 수 없으며 현재에도 개선이 이루어지고 있다.

그러나 기존 수치해법의 단점을 극복한 새로운 수치기법으로 CIP(Cubic-Interpolated Propagation)가 1985년 Yabe⁽³⁾에 의해서 개발되었다. 이 방법은 정도 높은 경계면의 기술이 가능하고 압축성 및 비압축성 유체를 통일적으로 취급할 수 있으며, 기·액·고상을 동시에 풀이하는 것이 가능한 비교적 새로운 기법이다.^(4,6)

본 논문에서는 CIP 법을 다상 열유동 및 상변화 현상의 해석에 적용을 위한 기초연구를 수행한다. CIP 법의 열유체 범용해법인 C-CUP 법^(7,8)여 캐비티 유동에서의 속도분포를 구한 후 SIMPLE에서 구한 결과와 비교해 보았다. 또한 댐의 붕괴와 같은 다상 이동경계면 문제에 C-CUP 법을 적용함으로써 액체와 기체사이의 복잡한 경계조건을 포함하지 않고도 타당한 결과가 도출됨을 보인다.

2. CIP 와 C-CUP 법

CIP 법은 일반적인 쌍곡선형 방정식을 풀 수 있는 알고리즘이다. 간결하며 수치확산이 적고 다차원에서의 확장이 용이한 장점이 있다. 다음과 같은 1차원 쌍곡선형 방정식

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

에서, u 가 상수라면 다음과 같은 해석해를 갖는다.

$$f(x,t) = f(x-ut, 0) \quad (2)$$

해석해는 시간 t , 좌표 x 에서의 함수 f 의 값은 시간 0일 때의 함수 f 의 값, 즉 초기 파형을 그대로 유지하면서 속도 u 로 전파하는 것을 의미한다. 그러나 수치해석에서 단순히 값을 이동시키는 것만으로는 다음과 같은 이유로 매우 부정확한 결과가 얻어진다. Fig.1(a)를 보면 ○로 표시한 초기의 파형이,

입의 시간 Δt 후에 ●로 표시한 파형의 위치로 이동한다. Fig.2(b)는 Δt 후의 격자점 상의 값만을 표시한 것인데, 이 값만이 주어진 경우에 Fig.1(a)에서 실선으로 표현한 파형을 예측하는 것은 불가능하며 Fig.1(c)와 같은 파형을 구할 수 밖에 없다. 이것은 유한한 격자점에서의 값만을 이용하고 격자점 사이의 분포를 모르기 때문에 선형적으로 보간함으로써 생긴 수치확산이다. Fig.1(d)의 그림은 CIP 법을 사용한 경우이며, 각 격자점에서의 물리량과 그 물리량의 변화율, 즉 구배를 계산하고 그 구배를 이용하여 격자점 사이의 값들을 3차 스플라인 보간법으로 계산한 것이다. 수치확산이 최소화되고 본래의 파형과 유사한 형태를 보이는 것을 알 수 있다. 식(1)에서 이동속도 u 가 변하거나 우측의 항이 0이 아닌 경우에는 해석해의 적용이 불가능하다. 그러나 u 가 변하거나 우측의 항이 0이 아니더라도 미소시간 Δt 동안에는 적용이 가능하다고 근사적으로 가정하면 다음의 식을 쓸 수 있다.

$$f(x_i, t + \Delta t) = f(x_i - u\Delta t, t) \quad (3)$$

즉 Δt 만큼 경과한 시각 $t + \Delta t$ 에서 위치 x_i 에서의 f 값을 시각 t 에서의 $(x_i - u\Delta t)$ 에서의 f 값을 사용하게 된다. $(x_i - u\Delta t)$ 가 격자점에 위치하지 않는 경우 f 의 값을 보간을 통하여 구하게 되나 직선보

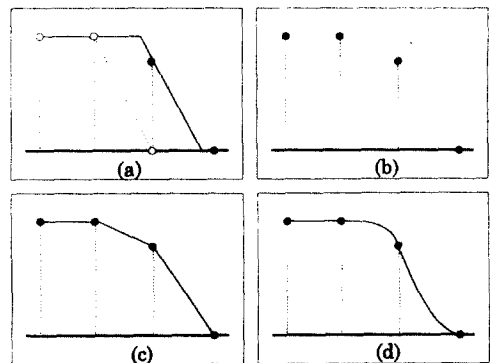


Fig.1 Modelling of interpolation

간에 의한 것이 Fig.1(c)이다. 곡선보간에 의한 결과도 역시 본래의 파형에서 크게 벗어난다. 이의 대안으로 3차 스플라인 보간을 생각할 수 있으며 $u < 0$ 일 때 구간 x_i 와 x_{i+1} 에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$F_i(x) = a_i X^3 + b_i X^2 + \dot{f}_i X + f_i, \quad X = x - x_i \quad (4)$$

여기서 미지수는 a_i, b_i, \dot{f}_i 이므로 미분의 연속성을 이용하여 결정한다.

$$F_i(x_{i+1}) = F_{i+1}(x_{i+1}) \quad (5)$$

$$\frac{dF_i(x_{i+1})}{dx} = \frac{dF_{i+1}(x_{i+1})}{dx} \quad (6)$$

$$\frac{d^2 F_i(x_{i+1})}{d^2 x} = \frac{d^2 F_{i+1}(x_{i+1})}{d^2 x} \quad (7)$$

식(5)과 식(6)을 통해서 a_i 와 b_i 를 계산할 수 있다.

$$a_i = \frac{(\dot{f}_i + \dot{f}_{i+1})}{\Delta x^2} + \frac{2(f_i - f_{i+1})}{\Delta x^3} \quad (8)$$

$$b_i = \frac{3(f_{i+1} - f_i)}{\Delta x^2} - \frac{(2\dot{f}_i + \dot{f}_{i+1})}{\Delta x} \quad (9)$$

또 하나의 미지수 \dot{f}_i 는 2개의 미분계산을 해야 하며, 미지수를 구하는 작업이 행렬의 형태가 되므로 계산량이 방대해지고 3차원으로의 확장이 곤란하다. 이를 해결한 방법이 3차 유사 스플라인 보간법으로서, CIP 법의 근간이 된다. 1차원 쌍곡선방정식의 해는 식(4)으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f_i^{n+1} = F_i(x_i - u\Delta t) \quad (10)$$

1차원 쌍곡선방정식인 식(1)을 공간미분하면

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

이 되나, 원래의 식(1)과 식(11)이 외관상 동일한

형태를 가지므로, 해의 형태도 동일한 형태를 가진다고 가정한다. 따라서 공간미분의 해는 식(10)을 공간미분하여 다음과 같다고 가정할 수 있다.

$$\dot{f}_i^{n+1} = \frac{dF_i(x_i - u\Delta t)}{dx} \quad (12)$$

이로써 식(4)의 남은 미지수는 a_i, b_i 이고 이는 식(8)과 식(9)에서 계산한다. 즉 1차미분과 2차미분을 사용하지 않고도 \dot{f}_i, f_i 을 이용해서 보간함수 $F(x)$ 를 구할 수 있다. 식(8), (9)를 식(4)에 대입한 결과 다음의 단순한 3차 다항식을 얻게 된다.

$$f_i^{n+1} = a_i \xi^3 + b_i \xi^2 + \dot{f}_i \xi + f_i \quad (13)$$

$$\dot{f}_i^{n+1} = 3a_i \xi^2 + 2b_i \xi + \dot{f}_i, \quad \xi = -u\Delta t \quad (14)$$

여기서 $\xi = -u\Delta t$ 이다. 이렇게 얻어진 f^{n+1} 을 f^n 으로, 그리고 \dot{f}^{n+1} 을 \dot{f}^n 으로 바꾸어 놓고 계산을 반복하면 시간에 따른 f 의 값을 구할 수 있다.

쌍곡선 방정식의 해법인 CIP 법을 일반 열유체방정식에 확장한 범용해법이 C-CUP(CIP-Combined Unified Procedure)법이다. C-CUP 법은 지배방정식을 비대류단계(1단계)와 대류단계(2단계)로 나누어서 계산을 수행한다. 비대류단계에서는 차분법을 이용하며, 먼저 압력을 결정하기 위해 압력에 대한 Poisson 방정식을 풀어 압력을 결정하거나 변경함으로써 속도장이 연속방정식을 만족시키도록 한다. 압력을 계산하고 이 값들을 이용해서 속도와 밀도를 계산한다.

대류단계의 계산에서는 비대류단계에서 계산된 밀도, 속도, 압력 즉 p^*, u^*, ρ^* 을 이용하여 CIP 법으로 $p^{n+1}, u^{n+1}, \rho^{n+1}$ 를 구한다.

3. 캐비티문제의 적용

3.1 해석모델과 경계조건

Fig.2 와 같은 정사각형 용기(4.2 × 4.2cm) 내에 상벽면이 이동하도록 하였다. 상벽면이 일정한 속도로 이동하면 점성에 의한 전단력이 발생하여 와동을 일으킨다. 계산에 사용된 상벽면의 이동속도는 0.005m/s 이며, 이때 Reynolds number 는 210 이다. 격자의 수는 22×22 에서 예비계산을 해보았으며, 격자의 수를 62×62 까지 증가하였다. 2 차원 직교좌표계에서 x, y 모두 등간격의 격자를 사용하였다. 경계조건은 고정된 세 개의 벽면에서 속도(u, v)는 0 이며 압력 p 도 0 으로 조건을 설정했다.

3.2 수치해석방법

계산에 사용된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

먼저 계산은 지배방정식을 대류단계와 비대류단계로 분리한다. 식(16)를 예로 들면 다음과 같이 분리할 수 있다.

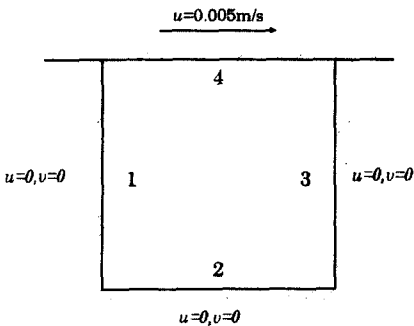


Fig.2 Schematic diagram with boundary conditions

$$\text{대류단계: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

$$\text{비대류단계: } \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

식(18)은 식(1)의 2 차원 형태로서 CIP 가 적용될 수 있다. C-CUP 법은 비대류단계에서 압력의 Poisson 방정식을 풀고 그 결과로써 속도를 보정하는 방법을 쓴다. 이때 Poisson 방정식을 구성하기 위해서는 식(19)에 발산을 취하나, 우변의 두 번째 항인 $\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ 은 포함시키지 않고 계산한다. 압력에

대한 Poisson 방정식은

$$\frac{\nabla^2 p^*}{\rho^n} = \frac{\nabla \cdot \vec{u}^n}{\Delta t} + \frac{p^* - p^n}{\gamma p^n \Delta t^2} \quad (20)$$

이 된다. 식(20)에서 우변의 두 번째 항에서 $\gamma p^n = C_p^* \rho$ 이라고 바꿔 쓸 수 있으므로 비압축성 유동인 캐비티유동에서 식(20)의 우변의 두 번째 항은 0 이다. 따라서 Poisson 방정식은

$$\frac{\nabla^2 p^*}{\rho^n} = \frac{\nabla \cdot \vec{u}^n}{\Delta t} \quad (21)$$

로 단순화된다. 압력을 계산하고 속도와 밀도를 보정한다. 대류단계의 계산에서 밀도항의 계산은 수렴을 오히려 늦추므로 밀도항의 계산은 생략한다.

비대류단계에서 계산된 $\rho_{i,j}^*, u_{i,j}^*, v_{i,j}^*, p_{i,j}^*$ 로부터 먼저 $\partial_x \rho^*, \partial_y \rho^*, \partial_x u^*, \partial_y u^*, \partial_x v^*, \partial_y v^*, \partial_x e^*, \partial_y e^*$ 를 계산하고 각각에 대해서, 즉 속도에 CIP 법을 적용하여 $u_{i,j}^{n+1}, v_{i,j}^{n+1}$ 를 구하고, 압력에 CIP 법을 사용해서 $p_{i,j}^{n+1}$ 를 구한다. 한 시간스텝의 계산이 끝나면 다시 경계조건을 적용해주고 시간스텝에서 계산된 $\rho_{i,j}^{n+1}, u_{i,j}^{n+1}, v_{i,j}^{n+1}, p_{i,j}^{n+1}$ 를 $\rho_{i,j}^n, u_{i,j}^n, v_{i,j}^n, p_{i,j}^n$ 으로 바꾸어

다음 시간스텝에서의 값을 계산한다.

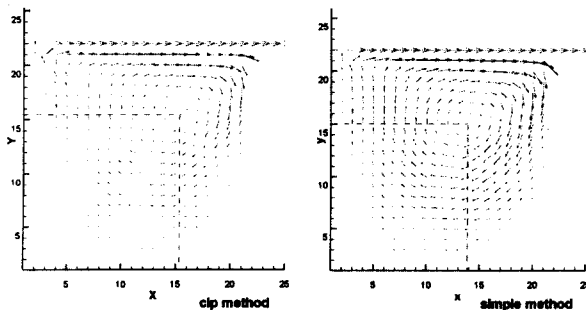
3.3 결과

CIP 법으로 계산된 결과의 신뢰성을 검토하기 위해, 동일한 조건하에서 SIMPLE 로 계산한 결과와 비교하였다. 캐비티유동에서의 개략도를 Fig.2 에 보인다. 격자 22×22 에서의 속도벡터를 Fig.3 에 보인다. CIP 법과 SIMPLE 의 결과를 비교하면, 정성적으로 매우 잘 일치한다. 정량적으로도 비교적 잘 일치하나, 와동의 중심위치가 CIP 법이 SIMPLE 보다 약간 우상(右上)으로 이동하며, 격자수가 증가하여도 와동의 중심위치는 거의 유사하다. 수치적인 비교를 위해 Fig.4 에 $y=2.4\text{cm}$ 에서의 속도 u 를 직접적으로 비교해 보았다. 전체적인 경향은 일치하지만 와동의 중심부에서는 최대 15% 정도의 차이가 발생했다.

4. 댐의 붕괴과정

4.1 해석모델과 경계조건

Fig.5 와 같이 초기에 물과 공기가 일정한 경계를 이루고 있다가 어떤 순간 물을 막고 있던 댐이 갑자기 붕괴되면 급격한 유동과 함께 경계면이 이동하게 된다. 계산에 사용된 좌표계는 직교 좌표계이며 격자수는 20×40 을 사용했다. x, y 모두 등간격의 격자를 사용하였고 시간간격은 0.05sec 으로 하



(a) by CIP (b) by SIMPLE

Fig.3 Distribution of velocity vectors in cavity

였다. 공기와 물의 밀도는 각각 0.001g/cm^3 , 1.0g/cm^3 이며 초기의 속도분포는 물과 공기 모두 0 으로 주었다. 공기의 압력은 대기압을 0 으로 하고, 물은 정수압의 분포를 적용했다.

4.2 수치해석방법

계산에 사용된 지배방정식은 식(15)~(17)과 동일하나 점성항은 생략하였다. 댐이 붕괴될 때 일어나는 물의 갑작스런 유동은 점성력에 의한 영향이 크지 않으므로 무시한 것이다. 그러나 수치계산시 발산의 우려가 있으므로 인공점성항을 포함시켰으며 이것이 점성항의 역할을 하게 된다. 인공점성항은 다음의 식을 사용한다.

$$q_i = \begin{cases} -\rho_i C_s \Delta u + \frac{\gamma+1}{2} \rho_i \Delta u^2 & \text{if } \Delta u < 0 \\ 0 & \text{if } \Delta u \geq 0 \end{cases} \quad (22)$$

x 방향의 속도 u 에 대한 비대류단계의 식은

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \quad (23)$$

이며, Poisson 방정식은

$$\frac{\nabla^2 p^n}{\rho^n} = \frac{\nabla \cdot \bar{u}^n}{\Delta t} + \frac{p^n - p^{n-1}}{\gamma p^n \Delta t^2} \quad (24)$$

이다. (24)식은 SOR(Successive Over Relaxation)법을 이용해서 풀이했으며 계산에 사용한 완화계수는 0.2 이다. 압력이 계산된 후에는 압력으로 속도와 밀도를 보정하는 계산을 한다. 이와 같은 방법으

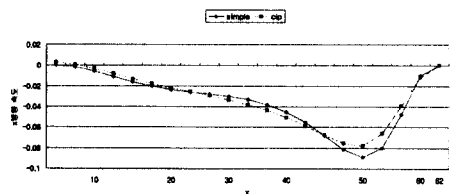


Fig.4 Comparison of u with CIP and SIMPLE at $y=2.4\text{cm}$.

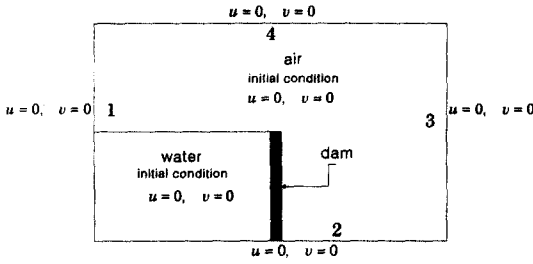


Fig.5 Schematic diagram with boundary condition

로 밀도 $\rho_{i,j}^n$, 속도 $u_{i,j}^n$, $v_{i,j}^n$ 및 압력 $p_{i,j}^n$ 을 계산한다. 그리고 $\partial_x \rho^*$, $\partial_y \rho^*$, $\partial_x u^*$, $\partial_y u^*$, $\partial_x v^*$, $\partial_y v^*$ 를 계산해 둔다. 대류단계에서는 운동방정식에 CIP 법을 적용하여 $u_{i,j}^{n+1}$, $v_{i,j}^{n+1}$ 를 구한 후, 에너지방정식에 CIP 법을 적용해서 $p_{i,j}^{n+1}$ 를 구한다. 한 시간스텝의 계산이 끝나면 다시 경계조건을 부여하고 시간스텝에서 계산된 $\rho_{i,j}^{n+1}$, $u_{i,j}^{n+1}$, $v_{i,j}^{n+1}$, $p_{i,j}^{n+1}$ 를 $\rho_{i,j}^n$, $u_{i,j}^n$, $v_{i,j}^n$, $p_{i,j}^n$ 으로 바꾸어 다음 시간스텝에서의 값을 계산한다.

4.3 결과 및 토의

Fig.6에 붕괴되는 과정을 보인다. 기존의 MAC⁽¹⁾이나 VOF⁽²⁾에 의한 결과들과 매우 좋은 일치율을 보인다. 그러나 기존의 방법들이 액체영역에 대해서만 계산을 수행하게 됨으로써 기액 경계면에 부여하는 복잡하면서도 시간에 따라 변화하는 경계조건이 불필요하게 되었다. 또한 바람 등의 영향으로 기체 부분의 유동이 액체에 직접적으로 영향을 주는 경우에도 쉽게 계산조건에 포함시킬 수 있는 장점은 CIP 법의 가능성을 높여 준다고 생각된다.

5. 결론

본 연구에서는 CIP 법을 이용하여 실제 다상의 열유동과 상변화 현상의 해석에 적용하기 위한 기초연구를 수행하였다. C-CUP 법을 이용해서 캐비티 유동에서의 유동을 구해보았으며 갑자기 댐이 붕괴하는 경우에 물과 공기의 다상 이동경계면의 거동

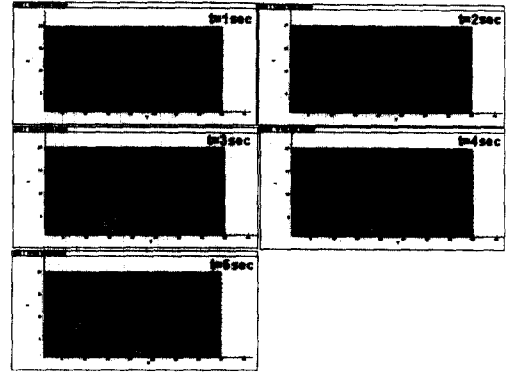


Fig.6 Density distribution and fluid configuration for broken dam problem.

해석을 수행해 보았다. 캐비티유동에서 해석한 결과는 SIMPLE 과 비교하여 잘 일치하는 결과를 얻었다. 한편, 댐이 붕괴되는 경우에 물과 공기의 다상 이동경계면의 거동을 해석해 본 결과는 매우 단순한 경계조건을 부여에도 불구하고 기존의 결과와 좋은 일치를 보였다.

참고문헌

1. F.H. Harlow and A.A. Amsden, 1968, Numerical Calculation of Almost Incompressible Flow, *J. Comput. Phys.*, Vol.3, pp.80-93.
2. C.W. Hirt and B.D. Nichols, 1981, Volume of fluid(VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, *J. Comput. Phys.*, Vol.39, pp.201-225.
3. T. Yabe and T. Aoki, 1996, Universal Solver CIP Method for Solid, Liquid and Gas, *Simulation Engineering*, Vol.1, No.1, pp.19-25.
4. H. Takewaki, A. Nishiguchi and T. Yabe, 1985, Cubic Interpolated Pseudo-particle Method (CIP) for Solving Hyperbolic-Type Equations, *J. Comput. Phys.*, Vol.61, pp.261-268.
5. Yabe T, Takei E, 1988, A new higher-order Godunov method for general hyperbolic equation. *J Phys Soc Japan* 57:2598-2601
6. 이상렬, 야베 다카시, 김범년, 1998, 다상 열유동 및 상변화 현상의 해석을 위한 CIP 법, *대학기체학회 에너지 및 동력공학부 학술강연회 강연집* pp.97-106.
7. Yabe T, Aoki T, 1991, A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver. *Comp Phys Commun* 66:219-232
8. Yabe T et al., 1991, A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. Two- and three dimensional solvers. *Comp Phys Common* 66:233-242.