碩士學位論文

CIP 법을 이용한 다상 이동경계면의 거동해석

A behavior analysis of multi-phase moving boundary using the CIP method

指導教授 洪 熙 基

慶熙大學校 大學院
機械工學科

朴 埈 弘

1999 年 2 月 日

CIP 법을 이용한
다상 이동경계면의 거동해석

A behavior analysis of multi-phase

moving boundary using the CIP method

指導敎授 洪 熙 基

이 論文을 工學 碩士學位論文으로 제출함

1999 年 2 月 日

慶熙大學校 大學院

機械工學科 熱流體專攻

朴 埈 弘

朴埈弘의 工學碩士學位論文을 認准함.

主審教授 ______________________ (印)

副審教授 ______________________ (印)

副審教授 ______________________ (印)

1999 年 2 月 日

慶熙大學校 大學院

요 약

압축성 유체와 비압축성 유체를 통일적으로 풀이할 수 있는 새로운 수치기법인 CIP(Cubic–Interpolated Propagation)법을 이용하여 다상 이동경계면을 해석하였다.

CIP 법은 3 차 스플라인 보간법을 개량한 방법으로 일반적인 쌍곡선형 방정식을 풀 수 있는 알고리즘이다. 압축성 유체와 비압축성 유체를 동시에 계산하며 대류항을 정도 높게 풀이하므로 해석이 힘들었던 충격파의 해석이나 이동 경계면의 해석 그리고 다상의 상변화현상의 해석에도 높은 정밀도를 보여주고 있는 방법이다.

CIP 법에서 발전한 열 유체방정식의 범용해법인 C–CUP(CIP–Combined Unified Procedure)법을 수치해석방법으로 이용해서 캐비티유동과 댐의 붕괴과정해석에 적용하여 보았다. 캐비티유동에서 CIP 법으로 구한 속도분포는 SIMPLE 의 속도분포와 매우 잘 일치하였으며 갑자기 댐이 붕괴되는 경우에 물과 공기의 다상 이동경계면은 매우 단순한 경계조건의 부여에도 불구하고 기존의 결과와 좋은 일치를 보였다.

차 례

List of Figures

Nomenclature

C_s	The speed of sound waves
e	The specific internal energy
g	Gravitational acceleration
t	Time
p	Pressure
u	Velocity of x direction
v	Velocity of y direction
γ	The specific heat ratio
ρ	Density
ν	Kinematic viscosity

Superscript

n	Nth time step
*	Contemporary value between n time step and n+1 time step
n+1	N+1th time step

1. 서론

최근 컴퓨터의 급격한 발달과 새로운 수치해석기법의 개발에 따라 열유체공학의 응용분야에서 지금까지는 실험에 의존해 왔던 현상들에 대한 수치해석이 활발하게 진행되고 있다. 그 중 다상 열유동 및 상변화현상은 하나의 물리영역 내에 기·액·고상이 혼재하면서 이동하거나 상변화를 수반하게 되며 동시에 급격한 밀도변화가 수반되는 복잡한 현상이므로 실험에 주로 의존해 왔다. 그러나 현재는 새로운 수치기법을 이용해서 현상을 해석하려는 연구가 활발하게 나타나고 있다.

다상 열유동 및 상변화현상을 볼 수 있는 한 예로 레이저 가공을 들 수 있는데, 금속 등의 고체에 레이저를 조사하여 녹이고 증발시켜서 구멍을 뚫어가는 과정으로 대단히 복잡한 현상인 다상 열유동 및 상변화현상이 포함되어 있다. 먼저 금속이 녹으면 응력에 지배되는 고체에서 점성에 지배되는 액체로 상변화가 일어나며 더욱 가열하면 증발이 일어난다. 이때는 압축되지 않는 액체로부터 압축되기 쉬운 기체로의 상변화가 일어난다. 이 경우의 밀도변화는 100 배 혹은 1000 배에 이른다. 이런 급격한 밀도변화가 수 마이크로미터의 얇은 층에서 일어난다. 한편 원자로의 노심용융과 같은 중대사고에서 수증기 폭발현상은 다상 열유동 및 상변화현상과 밀접한 관계가 있으나 아직도 현상에 대한 이론이 명확히 확립되어 있지 않다.

이런 현상을 수치적으로 해석하기 위한 시도로 지금까지 여러 가지의 수치기법들이 제시되어 왔다. 그러나 압축성 유체와 비압축성 유체에 대해서는 수치기

법이 각각 독립적으로 개발되어 왔다. 그 이유는 압축성 유체와 비압축성 유체에 대하여 수치해석에서 사용되는 방정식의 형태가 서로 다르며, 즉 압축성 유체는 방정식의 형태가 보존형이며 비압축성 유체는 방정식의 형태가 비보존형이므로 동시에 풀이하기는 매우 힘들다. 또한 비압축성 유체는 압축성 유체에 비해서 음속이 매우 빠르다는 특징이 있다. 그러나 다상 열유동 및 상변화현상은 물질의 상변화가 빠르게 일어나고 동시에 급격한 밀도변화가 수반되므로 압축성 유체와 비압축성 유체의 동시처리가 반드시 필요하다.

압축성 유체와 비압축성 유체의 동시처리를 처음 시도한 수치기법은 Harlow와 Amsden[1]의 ICE(Implicit Continuous Eulerian)법을 들 수 있다. 이 방법은 지배방정식을 보존형 형태로 유지함으로써 압축성과 비압축성 유체를 동시 처리하기는 했으나, 현재까지 특별한 진보가 없이 개발단계에 머무르고 있다. 여러 상용 수치해석코드의 근간을 이루는 SIMPLE 계열의 유한체적법은, 수치해석방법으로는 범용성을 가지고 있지만 압축성 유체와 비압축성 유체의 동시처리가 곤란하며, 서로 다른 상의 경계가 격자계 내부를 이동할 때에는 날카로운 경계면이 퍼져나가는 수치확산이 발생하는 단점 때문에 다상 열유동 및 상변화 현상을 해석할 때에는 적합하지 않다. 유한체적법과 연계하여 사용되는 VOF(Volume of Fraction)법[2]은 인접 검사체적 사이의 유동을 고려하는 방법이나 3 차원으로의 확장이 힘들고 기하학적인 형상이 복잡할 경우에는 부정확한 결과가 나온다. 격자가 물질과 함께 이동하는 Lagrangian 기법을 사용하는 ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian)법은 상이한 물질의 경계를 정확하게 포착할 수 있지만, 파도가 부서지는 것과 같이 경계가 분리되는 현상이 발생할 때는 사용이 부적합하다. 이와 같이 여러 가지 수치기법들이 제시되었지만, 다상 열

유동 및 상변화현상의 해석에 완전하다고는 할 수 없으며 현재까지도 개선이 이루어지고 있다.

그러나 지금까지 설명한 방법들의 단점을 극복한 새로운 수치기법으로 CIP(Cubic–Interpolated Propagation)법이 1985 년 Yabe[3-8]에 의해서 제시되었다. CIP 법은 다른 수치기법보다 훨씬 정도 높은 경계면의 기술이 가능하고 압축성 및 비압축성 유체를 통일적으로 취급할 수 있으며 기·액·고상을 동시에 풀이하는 것이 가능한 새로운 기법이다. 또한 CIP 법은 다수의 논문에서 다상 열유동 및 상변화 현상의 해석에 유효함이 입증되고 있다.

이와 같은 이유로 본 논문에서는 CIP 법을 다상의 열유동 및 상변화 현상의 해석에 적용을 위한 기초연구를 수행한다. 아직 국내에서는 생소한 수치기법인 CIP 법의 기본원리을 정리하고 CIP 법의 열유체 범용해법인 C–CUP 법[7,8]을 이용하여 캐비티유동에서의 속도분포를 구하여 SIMPLE 에서 구한 결과와 비교해 보았다. 또한 댐의 붕괴와 같은 다상 이동경계면 문제에 C-CUP 법을 적용함으로써 액체와 기체 사이의 복잡한 경계조건을 포함하지 않고도 타당한 결과가 도출됨을 보이는 것이 본 논문의 주된 연구내용이다.

2. CIP 와 C-CUP 법

2.1 CIP 법의 원리

CIP 법은 일반적인 쌍곡선형 방정식을 풀 수 있는 알고리즘으로, 간결하며 수치확산이 적고 다차원으로 확장이 용이한 장점이 있다. 여기서는 CIP 법의 원리를 1 차원의 경우에 대하여 설명한다. 다음과 같은 쌍곡선형 방정식을 생각해 보자.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

u 가 일정한 상수라면 쌍곡선형 방정식은 다음과 같은 해석해를 갖는다.

$$f(x,t) = f(x - ut, 0) \tag{2}$$

해석해는 시간 t, 좌표 x 에서의 함수 f 의 값이 시간 0 일 때의 함수 f 가 파형을 그대로 유지하면서 속도 u 로 전파하는 것을 의미한다. 이 경우에 수치해석에서도 단순히 값을 이동시키는 것만으로 엄밀해가 얻어진다고 생각할 수 있으나, 이는 잘못된 생각이며 그 이유를 Fig. 1 을 통해서 설명한다.

Fig. 1(a)를 보면 ○로 표시한 초기의 파형이 연속체에서는 미소시간 Δt 후에 ●로 표시한 파형의 위치로 이동한다. Fig. 1(b)는 Δt 후의 격자점 상의 값만을 표시한 것인데, 이 값만이 주어진 경우에 Fig. 1(a)에서 실선으로 표현한 파형을 예측하는 것은 불가능하며 Fig. 1(c)와 같은 파형을 직관적으로 상상하게 된다. 이것은 유한한 격자점만을 이용하고 격자점 사이에서의 분포를 모르기 때문에

선형적으로 보간함으로써 생긴 수치확산이다. Fig. 1(d)의 그림은 앞으로 설명하게 될 CIP 법을 사용한 경우로 각 격자점에서의 물리량과 그 물리량의 변화율, 즉 구배를 계산하고 그 구배를 이용하여 격자점 사이의 값들을 3 차 스플라인 보간법으로 계산한 것이다. 수치확산이 최소화되고 본래의 파형과 유사한 형태를 보이는 것을 알 수 있다.

식(1)에서 이동속도 u 가 변하거나 우측의 항이 0 이 아닌 경우에는 해석해의 적용이 불가능하다. 그러나 u 가 변하거나 우측의 항이 0 이 아니더라도, 미소시간 Δt 동안에는 적용이 가능하다고 근사적으로 가정하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(x_i, t+Dt) = f(x_i - uDt, t) \tag{3}$$

즉 Dt 만큼 경과한 시각 $t+Dt$ 에서 위치 x_i 에서의 f 값을, 시각 t 에서의 $(x_i - uDt)$ 에서의 f 값을 사용하게 된다. 그러나 $(x_i - uDt)$ 가 격자점에 위치하지 않는 경우 f 의 값을 정해 주기 위해서 보간을 이용하는데, 보간의 방법에는 직선보간, 곡선보간 그리고 3 차 스플라인 보간법등이 있다.

이동속도 u<0 일 때 구간 x_i 와 x_{i+1} 에 대해 직선보간과 곡선보간 그리고 스플라인 보간법을 설명하면 다음과 같다.

직선보간은 알고 있는 두 점 사이를 선형보간해서 값을 구하는 방법으로 Fig. 2 와 같이 x_i 와 x_{i+1} 사이의 $(x_i - uDt)$ 에서의 f 값을 구하기 위해서 직선으로 선형보간을 한다.

이 경우의 관계식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{x_i - x}{x_i - x_{i+1}} = \frac{F(x) - f_i}{f_{i+1} - f_i} \tag{4}$$

식(4)를 정리하면 다음과 같다.

$$F(x) = \frac{x - x_i}{Dx}\left(f_{i+1}^{n} - f_i^{n}\right) + f_i^{n} \tag{5}$$

여기서 $Dx = x_{i+1} - x_i$ 이다. 식(5)에서 윗첨자 n 은 n 시간스텝에서의 값을 의미한다.

1 차 보간, 즉 직선보간에 의해서 $n+1$ 시간스텝에서의 f_i^{n+1} [식(3)의 $f(x_i, t+Dt)$]을 구하면 다음과 같다.

$$f_i^{n+1} = F(x_i - u\,Dt) = -\frac{u\,Dt}{Dx}\left(f_{i+1}^{n} - f_i^{n}\right) + f_i^{n} \tag{6}$$

여기서 $x - x_i = uDt$ 이다.

곡선보간은 두 점 사이를 식(7)과 같이 2 차식으로 보간하는 방법이다.

$$F(x) = ax^2 + bx + c \tag{7}$$

식(7)에서 a, b, c 가 모르는 미지수이므로, 세 개의 점이 필요하다. 알고 있는 세 개의 점을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} F(x_{i-1}) &= f_{i-1}^{n} \\ F(x_i) &= f_i^{n} \\ F(x_{i+1}) &= f_{i+1}^{n} \end{aligned} \tag{8}$$

식(7)이 식(8)의 $F(x_{i-1}) = f_{i-1}^{n}$ 인 조건을 만족하도록 식(7)을 변형하면 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$F(x) = a(x - x_{i-1})^2 + b(x - x_{i-1}) + f_{i-1}^{n} \tag{9}$$

식(9)에 $F(x_i) = f_i^{n}$, $F(x_{i+1}) = f_{i+1}^{n}$ 를 이용하여 a, b 를 구하면 다음과 같다.

$$a = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{2Dx^2} \tag{10}$$

$$b = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{Dx} - aDx \tag{11}$$

여기서 $Dx = x_i - x_{i-1}$ 이다.

a 와 b 를 식(10)과 식(11)에서 구했으므로 2 차 다항식을 이용하여 f_i^{n+1} 를 구하면 다음과 같다.

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{uDt}{2Dx}(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\left(\frac{uDt}{Dx}\right)^2 (f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) \tag{12}$$

3 차 스플라인 보간법은 한 구간을 하나의 3 차 다항식으로 기술하고 이것을 미분의 연속성에 의해 결정하는 방법으로, $u<0$ 일 때 구간 x_i 와 x_{i+1} 에 대해서 다음과 같은 3 차 스플라인 방정식을 쓸 수 있다.

$$F_i(x) = a_i X^3 + b_i X^2 + \dot{f}_i X + f_i, \quad X = x - x_i \tag{13}$$

이 경우에 미지수는 $a_i, b_i, \dot{f}_i$ 이므로 미분의 연속성을 이용하여 미지수를 결정하는데, 사용되는 식은 다음과 같다.

$$F_i(x_{i+1}) = F_{i+1}(x_{i+1}) \tag{14}$$

$$\frac{dF_i(x_{i+1})}{dx} = \frac{dF_{i+1}(x_{i+1})}{dx} \tag{15}$$

$$\frac{d^2 F_i(x_{i+1})}{d^2 x} = \frac{d^2 F_{i+1}(x_{i+1})}{d^2 x} \tag{16}$$

식(13)에 식(14)와 식(15)을 적용하면 다음과 같다.

$$a_i Dx^3 + b_i Dx^2 + \dot{f}_i Dx + f_i = f_{i+1} \tag{17}$$

$$3a_i Dx^2 + 2b_i Dx + \dot{f}_i = \dot{f}_{i+1} \tag{18}$$

여기서 $Dx = x_{i+1} - x_i$ 이다.

식(17)과 식(18)식을 통해서 a_i 와 b_i 를 계산할 수 있다.

$$a_i = \frac{(\dot{f}_i + \dot{f}_{i+1})}{Dx^2} + \frac{2(f_i - f_{i+1})}{Dx^3} \tag{19}$$

$$b_i = \frac{3(f_{i+1} - f_i)}{Dx^2} - \frac{(2\dot{f}_i + \dot{f}_{i+1})}{Dx} \tag{20}$$

또 하나의 미지수 $\dot{f}_i$ 는 2 계의 미분계산을 해야 하며 실제 수치해석을 할 때 미지수를 구하는 작업이 행렬의 형태로 진행되므로 계산량이 방대해지고 3 차원으로의 적용이 힘든 단점이 있다.

이를 해결한 방법이 3 차 유사 스플라인 보간법, 즉 CIP 법이다.

1 차원 쌍곡선 방정식의 형태와 해의 형태가 다음과 같을 때

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{21}$$

$$f_i^{n+1} = F_i(x_i - uDt) \tag{22}$$

1 차원 쌍곡선 방정식을 공간미분한 식의 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{23}$$

이때 u 가 일정한 상수이므로 식(23)의 세 번째 항은 0 이 되고 이를 정리하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial t} + u\frac{\partial \dot{f}}{\partial x} = 0 \tag{24}$$

원래의 식과 공간미분한 형태의 식이 동일한 형태를 가지므로 해의 형태도 동일한 형태를 가진다고 가정하는 것이 CIP 법의 출발점이다. 이 경우에 공간미분의 해는 다음과 같다고 가정할 수 있다.

$$\dot{f}_i^{n+1} = \frac{dF_i(x_i - uDt)}{dx} \tag{25}$$

남은 미지수는 a_i, b_i 이고 이는 식(19)과 식(20)에서 계산했으므로 1 차 미분과 2 차 미분을 사용하지 않고도 알고 있는 $\dot{f}_i$, f_i 을 이용해서 보간함수를 구할 수 있다.

3 차 유사 스플라인 보간법, 즉 CIP 법을 이용하여 미지수를 구한 3 차 다항식은 다음과 같다.

$$f_i^{n+1} = a_i x^3 + b_i x^2 + \dot{f}_i x + f_i \tag{26}$$

$$\dot{f}_i^{n+1} = 3a_i x^2 + 2b_i x + \dot{f}_i, \quad x = -uDt \tag{27}$$

이렇게 얻어진 f^{n+1} 을 f^n 으로, $\dot{f}^{n+1}$ 을 $\dot{f}^n$ 으로 바꾸어 놓고 계산을 반복하면 f 가 시간 진행시의 값을 계속해서 구할 수 있다.

1 차원 CIP 법의 예로 초기파형이 사각형과 삼각형일 때 직선보간, 곡선보간 그리고 CIP 법을 각각 사용하여 1000 시간 스텝 진행한 후 파형의 모습을 Fig. 4 에 보인다. CIP 법을 이용해서 초기파형이 사각형일 때 500 시간 스텝이 지난 후의 파형의 모습을 Fig. 5 에 보였다. CIP 법에 tangent 법을 덧붙여 사용한 경우의 파형의 모습을 같이 비교해 보았다.

CIP 법은 2, 3 차원으로 용이하게 확장이 가능하다. 2 차원에서 CIP 법을 사용해서 초기 파형이 정사각형일 때 100 시간 스텝마다의 파형을 Fig. 6 와 Fig. 7

에 나타내었고, 초기파형이 원인 경우의 파형의 모습을 Fig. 8 에 나타내었다.

Fig. 6 에서 Fig. 8 까지의 그림은 정확한 파형을 유지하기 의해서 tangent 법을 CIP 법에 덧붙여 사용하였는데 tangent 법이란 상(phase)의 경계를 정확하게 알고 싶을 경우와 같이 경계면을 정확하게 구분해야 할 경우에 사용하는 방법이다. CIP 법에 의한 해는 약간의 오버슛(overshoot)이 보이므로 물질의 경계표면과 같이 예리한 경계를 실현하기에는 개선의 여지가 있다. 그래서 f 대신 $h = \tan\left[p\ (f - \frac{1}{2})\right]$ 로 변수변환을 한 후 h 를 f 처럼 $\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ 을 CIP 법으로 풀고 계산이 끝난 후 다음과 같이 역변환을 한다.

$$f = \frac{\arctan(h)}{p} + \frac{1}{2} \tag{28}$$

식(28)에 의해 f 의 값을 되돌려 받을 수 있다.

이와 같은 변환은 f 가 0 에서 1 의 일정치를 가질 때만 유효하다. 이것은 물질내의 밀도함수와 같이 물질이 존재하는 위치를 1, 존재하지 않는 위치를 0 으로 지정함으로써 정확한 경계면의 위치를 기술할 수 있다.

2.2 비선형 방정식의 해법

2.1 절 CIP 법의 원리에서 설명한 부분은 쌍곡선 방정식의 형태가 선형 방정식에 대한 해법이었고, 이 절에서는 비선형 방정식일 경우로 확장하도록 한다.

다음과 같은 비선형 방정식을 가정하면

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial fu}{\partial x}=g \tag{29}$$

식(29)를 CIP 법으로 풀기 위해서 다음과 같이 변형하여 외관상 식(1)과 유사한 형태가 되도록 한다.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=G \tag{30}$$

여기서 $G=g-f\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 이다. 또한 CIP 법에서 필요한 $\dot{f}$ 는 식(30)을 미분한 후 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial t}+u\frac{\partial \dot{f}}{\partial x}=\dot{G}-\dot{f}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{31}$$

CIP 법에서는 식(30)과 식(31)을 2 단계로 나누어서 계산한다.

$$\text{비대류단계:}\ \frac{\partial f}{\partial t}=G \tag{32}$$

$$\text{대류단계:}\ \frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{33}$$

$$\text{비대류단계:}\ \frac{\partial \dot{f}}{\partial t}=\dot{G}-\dot{f}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{34}$$

$$대류단계: \frac{\partial \dot{f}}{\partial t} + u\frac{\partial \dot{f}}{\partial x} = 0 \tag{35}$$

식(32)과 식(34)은 비대류단계이고 식(33)과 식(35)는 대류단계이다. 본 논문에서는 비대류단계를 먼저 계산하고 대류단계를 계산했다.

A. 비대류항

비대류단계에서는 차분법을 이용한다. 즉 f 에 대해서는 식(32)으로부터 f_i^* 가 다음과 같이 계산된다.

$$f_i^* = f_i^n + G_i Dt \tag{36}$$

여기서 윗첨자 *는 비대류항의 단계를 계산한 후의 f 를 의미한다.(시간스텝 n 과 $n+1$ 의 중간단계로 생각할 수 있다.) $\dot{f}$ 에 대해서는 먼저 다음과 같이 $\dot{G}$ 에 대한 일반화가 필요하다. 식(36)으로부터 $f_i^* - f_i^n = G_i Dt$ 이므로, 공간미분 $\dot{G}\left(=\frac{\partial G}{\partial x}\right)$의 차분식은

$$\dot{G}_i = \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2Dx} = \frac{f_{i+1}^* - f_{i-1}^* - f_{i+1}^n + f_{i-1}^n}{2Dx\,Dt} \tag{37}$$

와 같은 관계가 얻어진다. 이것을 식(34)에 대입하여 정리하면

$$\dot{f}_i^* = \dot{f}_i^n + \frac{f_{i+1}^* - f_{i-1}^* - f_{i+1}^n + f_{i-1}^n}{2Dx} - \dot{f}_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2Dx} Dt \tag{38}$$

이 된다. 이와 같이 하여 $\dot{f}$ 에 대해서는 G 의 미분값을 직접 구하지 않고도 계산할 수가 있다.

B. 대류항

대류항의 단계에서는 앞에서 설명한 CIP 법의 계산결과를 이용한다. 즉 비대류단계에서 구한 f^* 와 $\dot{f}^*$ 를 이용하여 f^{n+1} 와 $\dot{f}^{n+1}$ 의 값을 계산하게 된다. 이상

과 같은 과정을 거쳐 최종적으로 식(29)식을 풀이할 수 있다.

2.3 C-CUP 법

2.3.1 C-CUP 법의 원리

쌍곡선 방정식의 해법인 CIP 법을 일반 열유체방정식에 확장한 범용해법이 C-CUP(CIP-Combined Unified Procedure)법이다. C-CUP 법은 다음에 보이는 벡터 형태의 지배방정식을 대류단계와 비대류단계로 나누어서 계산을 수행한다.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{f} = \vec{G} \tag{39}$$

$$\vec{f} = (r, \vec{u}, p), \quad \vec{G} = (-r\nabla \cdot \vec{u}, -\frac{\nabla p}{r}, -g\, p\nabla \cdot \vec{u})$$

지배방정식인 식(39)을 대류단계와 비대류단계로 나누면 다음과 같다.

비대류단계(non-convection stage)는 대류항을 제외한 나머지 항들만 고려한다.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \vec{G} \tag{40}$$

대류단계(convection stage)는 시간항과 대류항만을 고려한다.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{f} = 0 \tag{41}$$

비대류단계에서는 차분법을 이용하여 풀이하는데, 식(40)을 다음과 같이 스칼라 형태로 각각 쓸 수 있다.

$$\frac{r^* - r^n}{Dt} = -r^n \nabla \cdot \vec{u}^{**} \tag{42}$$

$$\frac{\vec{u}^{**} - \vec{u}^n}{Dt} = -\frac{\nabla p^{**}}{r^n} \tag{43}$$

$$\frac{\vec{u}^{*} - \vec{u}^{**}}{Dt} = \vec{Q}_u \tag{44}$$

$$\frac{p^{**} - p^{n}}{Dt} = -g \; p^{n} \nabla \cdot \vec{u}^{**} \tag{45}$$

$$\frac{p^{*} - p^{**}}{Dt} = \vec{Q}_p \tag{46}$$

위 식들에서 보이는 윗첨자 **는 앞서 설명된 *와 n 의 중간단계의 값으로, 식(43)에서 계산된 속도가 바로 u^{*} 가 되지 않고 u^{**} 가 되어서 임시값을 저장하고 있다가 식(44)에서 인공점성항을 계산한 후에 u^{*} 의 값이 된다. 식(44)에서 보이는 $\vec{Q}_u$ 는 인공점성, 실제점성, 탄성응력 그리고 표면장력 등의 항을 포함하는 부분이며, 식(46)에서 $\vec{Q}_p$ 는 열전도의 항을 포함하는 부분이다. 또한 외부에서 가해지는 힘, 즉 중력과 같은 항이 있을 때에는 식(43)의 우변의 압력 뒤에 덧붙여 쓰면 된다.

비대류단계의 계산은 먼저 압력을 결정하기 위해 Poisson 방정식을 적용하며, 압력을 결정하거나 변경함으로써 속도장이 연속방정식을 만족하게 한다.

압력에 대한 Poisson 방정식을 만들기 위해서 식(43)에 발산을 취하면 다음과 같다.

$$\frac{\nabla \cdot \vec{u}^{**} - \nabla \cdot \vec{u}^{n}}{Dt} = -\frac{\nabla^{2} p^{**}}{r^{n}} \tag{47}$$

식(47)을 $\nabla \cdot \vec{u}^{**}$ 에 대해서 정리하고 식(45)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\nabla^{2} p^{**}}{r^{n}} = \frac{p^{**} - p^{n}}{g \; p^{n} Dt^{2}} + \frac{\nabla \cdot \vec{u}^{n}}{Dt} \tag{48}$$

식(48)은 우변의 첫 번째 항을 제외하면 MAC(marker and cell)법에서 사용하는 식과 동일한 형태가 된다.

식(48)은 기존의 비압축성 유체방정식의 해법인 MAC 법에 압축성일 때도 발산하지 않고 값이 수렴할 수 있도록 새로운 항이 추가된 형태로, 식에 대한 자세한 설명을 하면 다음과 같다.

음파의 속도가 큰 경우, 즉 음속의 전파시간 $t_s << Dt$ 인 경우 우변의 첫 번째 항인 $\frac{p^{**} - p^n}{g\ p^n Dt^2}$에서 음속을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_s = \sqrt{\frac{g\ p}{r}} \qquad (49)$$

따라서 음속이 클 경우에는 $\frac{p^{**} - p^n}{g\ p^n Dt^2}$가 0 에 접근한다. 이 경우 식(48)은 다음의 단순한 형태가 된다.

$$\frac{\nabla^2 p^{**}}{r^n} = \frac{\nabla \cdot \vec{u}^n}{Dt} \qquad (50)$$

식(50)은 비압축성 유체의 해법으로 사용되고 있는 MAC 법에서 사용되고 있는 Poisson 방정식과 동일한 형태이다.

음속의 전파시간 $t_s >> Dt$ 인 경우, 즉 압축성의 경우에는 식(48)에서 $\frac{p^{**} - p^n}{g\ p^n Dt^2}$이 $\frac{\nabla^2 p^{**}}{r^n}$보다 매우 큰 값을 보이므로 $\frac{\nabla^2 p^{**}}{r^n}$을 0 으로 취급한다. 이때의 식은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{p^{**} - p^n}{D\,t} = -g\ p^n\ \nabla \cdot \vec{u}^n \qquad (51)$$

앞에서 설명한 부분을 정리하면 식(48)은 비압축성인 경우, 즉 음속이 무한히

클 경우에는 식(50)과 같이 되어 MAC 법에 사용되는 Poisson 방정식과 같은 형태가 되며 압축성 유체와 같이 속도의 구배가 급격하게 변하는 경우에는 식(51)과 같이 된다. 그 결과 압축성 유체와 같이 속도구배가 급격하게 변화하는 경우 MAC 법에서는 발산하나, C-CUP 법은 압축성 유체에 대해서도 발산하지 않고 수렴한다.

압력 Poisson 방정식을 풀어서 압력을 계산하고 이 값들을 이용해서 속도와 밀도를 계산한다. 만약 식(44)에서 인공점성항 $\vec{Q}_u$ 를 0 으로, 고려하지 않는 경우에는 속도는 단순히 다음 식으로 구하게 된다.

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{Dt} = -\frac{\nabla p^{**}}{r^n} \tag{52}$$

밀도의 계산은 식(42)에 식(45)를 대입하여 변형하면 다음과 같다.

$$r^* - r^n = \frac{r^n}{g\ \ p^n}(p^{**} - p^n) \tag{53}$$

식(46)를 차분법으로 계산하면 p^*를 구할 수 있다. 여기까지가 비대류단계의 계산이다.

대류단계의 계산에서는 비대류단계에서 계산된 밀도, 속도 및 압력의 값, 즉 p^*, u^*, r^* 을 가지고 CIP 법을 이용해서 $p^{n+1}, u^{n+1}, r^{n+1}$ 를 구한다.

2.3.2 C-CUP 법의 1 차원코드

1 차원 평면좌표계에서 다음과 같은 지배방정식을 생각한다.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \vec{G} \tag{54}$$

여기서 $\vec{f} = (r, u, e)$, $\vec{G} = \left(-r\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{p}{r}\frac{\partial u}{\partial x} \right)$이다.

식(54)를 풀기 위해 엇갈림 격자(staggered grid)를 사용하고 있다. 그러므로 밀도와 압력 그리고 에너지는 x_i에서 정의되고 있으며 속도는 $x_{i+1/2}$에서 정의된다.

비대류단계에서의 지배방정식을 차분을 이용하여 이산화하면 다음과 같다.

$$\frac{r_i^* - r_i^n}{Dt} = -r_i^n \frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{Dx} \tag{55}$$

$$\frac{u_{i+1/2}^* - u_{i+1/2}^n}{Dt} = -\frac{2}{r_{i+1}^n + r_i^n}\frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{Dx} \tag{56}$$

$$\frac{e_i^* - e_i^n}{Dt} = -\frac{p_i^n}{r_i^n}\frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^* + u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{2Dx} \tag{57}$$

1 차원의 C-CUP 법의 계산순서는 다음과 같다.

① 초기값들을 설정한다.

② 압력에 대한 Poisson 방정식(식(48))을 푼다.

③ 식(55), 식(56), 식(57)을 이용하여 r^*, u^*, e^*를 구한다.

④ 식(38)을 이용하여 $\dot{r}^*, \dot{u}^*, \dot{e}^*$를 구한다.

⑤ 밀도, 속도, 압력에 대해서 각각 CIP 법을 이용하여 계산한다. 이때 밀도와

압력의 계산에서 사용되는 대류항의 속도는 $u_{av} = \left(\frac{u_{i+1/2} + u_{i-1/2}}{2} \right)$를 사용한다.

⑥ 다음 시간스텝으로 ②에서 ⑤번을 반복한다.

충격파를 계산하는 경우에는 일반적으로 수치계산시의 발산을 막기위해 인공 점성항이 필요하다. 해석하려는 모델에 따라 다르게 적용할 수 있는 부분이므로 일반적인 것은 아니지만 대개 인공점성항은 다음과 같은 식으로 결정한다.

$$\begin{aligned} q_i &= a\left(- r_i C_s Du + \frac{g+1}{2} r_i Du^2 \right) \quad if \quad Du < 0 \\ &= 0 \qquad if \quad Du \geq 0 \end{aligned} \qquad (58)$$

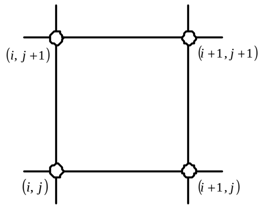
여기서 C_s는 음속, g는 비열비이며 $Du = u_{i+1/2} - u_{i-1/2}$ 이다. 일반적으로 a 는 상수로 충격파의 계산시 0.6 에서 0.7 을 사용하지만 문제의 성격에 따라서 다른 값을 적용할 수 있다.

2.3.3 C-CUP 법의 2 차원 코드

직교좌표계에서 쌍곡선형 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = g \qquad (59)$$

계산을 간단히 하기 위해서 Dx 와 Dy 는 일정하다고 하고, $u<0$ 이고 $v<0$ 이라고 가정하면 다음과 같은 격자 $(i,j)-(i,j+1)-(i+1,j+1)-(i+1,j)$ 에서 3 차 스플라인 보간함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.



$$\begin{aligned} F_{i,j}(x,y) &= \left[\left(A1_{i,j}X + A2_{i,j}Y + A3_{i,j}\right)X + A4_{i,j}Y + \partial_x f_{i,j}\right]X \\ &+ \left[\left(A5_{i,j}Y + A6_{i,j}X + A7_{i,j}\right)Y + \partial_y f_{i,j}\right]Y + f_{i,j} \end{aligned} \qquad (60)$$

2 차원에서도 1 차원과 마찬가지로 식(59)를 비대류단계와 대류단계로 구분하여 계산한다.

비대류단계에서 $f, \partial_x f, \partial_y f$ 는 다음과 같다.

$$f^*_{i,j} = f^n_{i,j} + g_{i,j}Dt \qquad (61)$$

$$\begin{aligned} \partial_x f^*_{i,j} &= \partial_x f^n_{i,j} - \frac{f^*_{i+1,j} - f^*_{i-1,j} - f^n_{i+1,j} + f^n_{i-1,j}}{2\,Dx} \\ &- \partial_x f^n_{i,j}\frac{\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)Dt}{2\,Dx} - \partial_y f^n_{i,j}\frac{\left(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}\right)Dt}{2\,Dx} \end{aligned} \qquad (62)$$

$$\begin{aligned} \partial_y f^*_{i,j} &= \partial_y f^n_{i,j} - \frac{f^*_{i,j+1} - f^*_{i,j-1} - f^n_{i,j+1} + f^n_{i,j-1}}{2\,Dy} \\ &- \partial_x f^n_{i,j}\frac{\left(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}\right)Dt}{2\,Dy} - \partial_y f^n_{i,j}\frac{\left(v_{1,j+1} - v_{i,j-1}\right)Dt}{2\,Dy} \end{aligned} \qquad (63)$$

대류단계에서도 $f^{n+1}_{i,j} = F_{i,j}\left(x_{i,j} - uDt, y_{i,j} - vDt\right), \partial_x f^{n+1}_{i,j} = \partial_x F_{i,j}, \partial_y f^{n+1}_{i,j} = \partial_y F_{i,j}$ 과 같이

계산되어 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$f_{i,j}^{n+1} = \left[\left(A1_{i,j}x + A2_{i,j}h + A3_{i,j}\right)x + A4_{i,j}h + \partial_x f_{i,j}^{*}\right]x + \left[\left(A5_{i,j}h + A6_{i,j}x + A7_{i,j}\right)h + \partial_y f_{i,j}^{*}\right]h + f_{i,j}^{n} \quad (64)$$

$$\partial_x f_{i,j}^{n+1} = \left(3A1_{i,j}x + 2A2_{i,j}h + 2A3_{i,j}\right)x + \left(A4_{i,j} + A6_{i,j}h\right)h + \partial_x f_{i,j}^{*} \quad (65)$$

$$\partial_y f_{i,j}^{n+1} = \left(3A5_{i,j}h + 2A6_{i,j}x + 2A7_{i,j}\right)h + \left(A4_{i,j} + A2_{i,j}x\right)x + \partial_y f_{i,j}^{*} \quad (66)$$

여기서 $x = -u\,Dt,\ h = -v\,Dt$ 이다.

앞에서 설명된 식들은 이동속도가 $u<0$ 이고 $v<0$ 인 경우에 사용할 수 있는 식이며 실제로 프로그램상에서는 이동속도의 부호에 상관없는 식이 필요하므로, 프로그램에 실제로 적용할 수 있도록 식을 변경한 것을 부록에 게재하였다.

1 차원 좌표계에서 지배방정식을 계산하는 것과 동일한 방식을 2 차원 직교좌표계에 적용한다. 다음과 같은 벡터형태의 지배방정식을 생각한다.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \vec{g} \quad (67)$$

식(67)을 스칼라 형식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial y} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x} \quad (69)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial y} \quad (70)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u\frac{\partial e}{\partial x} + v\frac{\partial e}{\partial y} = -\frac{p}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (71)$$

여기서 r 는 밀도, u, v 는 속도, p 는 압력, e 는 비내부에너지(specific internal energy)이다.

1 차원에서와 마찬가지로 엇갈림 격자계를 사용하고 있으므로 p, e, r 는 격자점인 (i, j) 에서 정의되고 x 방향 속도 u 는 $\left(i+\frac{1}{2}, j\right)$에서 정의되며 y 방향 속도 v 는 $\left(i, j+\frac{1}{2}\right)$에서 정의된다. 그러므로 비대류단계에서 차분법을 이용해서 이산화하면 차분식은 다음과 같다.

$$\frac{r^{*}_{i,j} - r^{n}_{i,j}}{Dt} = -r^{n}_{i,j}\left(\frac{u^{n}_{i+1/2,j} - u^{n}_{i-1/2,j}}{Dx} + \frac{v^{n}_{i,j+1/2} - v^{n}_{i,j-1/2}}{Dy}\right) \quad (72)$$

$$\frac{u^{*}_{i+1/2,j} - u^{n}_{i+1/2,j}}{Dt} = -\frac{2}{r^{n}_{i+1,j} + r^{n}_{i,j}} \frac{p^{n}_{i+1,j} - p^{n}_{i,j}}{Dx} \quad (73)$$

$$\frac{v^{*}_{i,j+1/2} - v^{n}_{i,j+1/2}}{Dt} = -\frac{2}{r^{n}_{i,j+1} + r^{n}_{i,j}} \frac{p^{n}_{i,j+1} - p^{n}_{i,j}}{Dy} \quad (74)$$

$$\frac{e^{*}_{i,j} - e^{n}_{i,j}}{Dt} = -\frac{p^{n}_{i,j}}{r^{n}_{i,j}}\left(\frac{DIV^{n} + DIV^{*}}{2}\right),$$
$$DIV = \left(\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{Dx} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{Dy}\right) \quad (75)$$

C-CUP 법에서 2 차원 유체방정식의 계산순서는 다음과 같다.

① 초기값들을 설정한다.

② 압력에 대한 Poisson 방정식을 푼다.

③ 식(72), 식(73), 식(74), 식(75)을 이용하여 $r^{*}, u^{*}, v^{*}, e^{*}$ 를 구한다.

④ 식(65)식과 식(66)을 이용하여 $\partial_x r^{*}, \partial_y r^{*}, \partial_x u^{*}, \partial_y u^{*}, \partial_x v^{*}, \partial_y v^{*}, \partial_x e^{*}, \partial_y e^{*}$ 를 구

한다.

⑤ 밀도, 속도, 압력에 대해서 각각 CIP 법을 이용하여 계산한다.

이때 밀도와 압력의 계산에서 사용되는 속도는 다음과 같다.

$$u1_{i,j}=\left(\frac{u^n_{i+1/2,j}+u^n_{i-1/2,j}}{2}\right),\ v1_{i,j}=\left(\frac{v^n_{i,j+1/2}+v^n_{i,j-1/2}}{2}\right) \qquad (76)$$

x 방향의 속도 u 를 계산할 때의 속도는 다음과 같다.

$$u=u^n_{i,j},v=\left(\frac{v^n_{i+1,j+1/2}+v^n_{i+1,j-1/2}+v^n_{i,j+1/2}+v^n_{i,j-1/2}}{4}\right) \qquad (77)$$

또한 y 방향의 속도 v 를 계산할 때는 속도는 다음과 같다.

$$u=\left(\frac{u^n_{i+1/2,j+1}+u^n_{i-1/2,j+1}+u^n_{i+1/2,j}+u^n_{i-1/2,j}}{4}\right),v=v^n_{i,j} \qquad (78)$$

⑥ 다음 시간스텝으로 ②에서 ⑤번을 계속해서 반복한다.

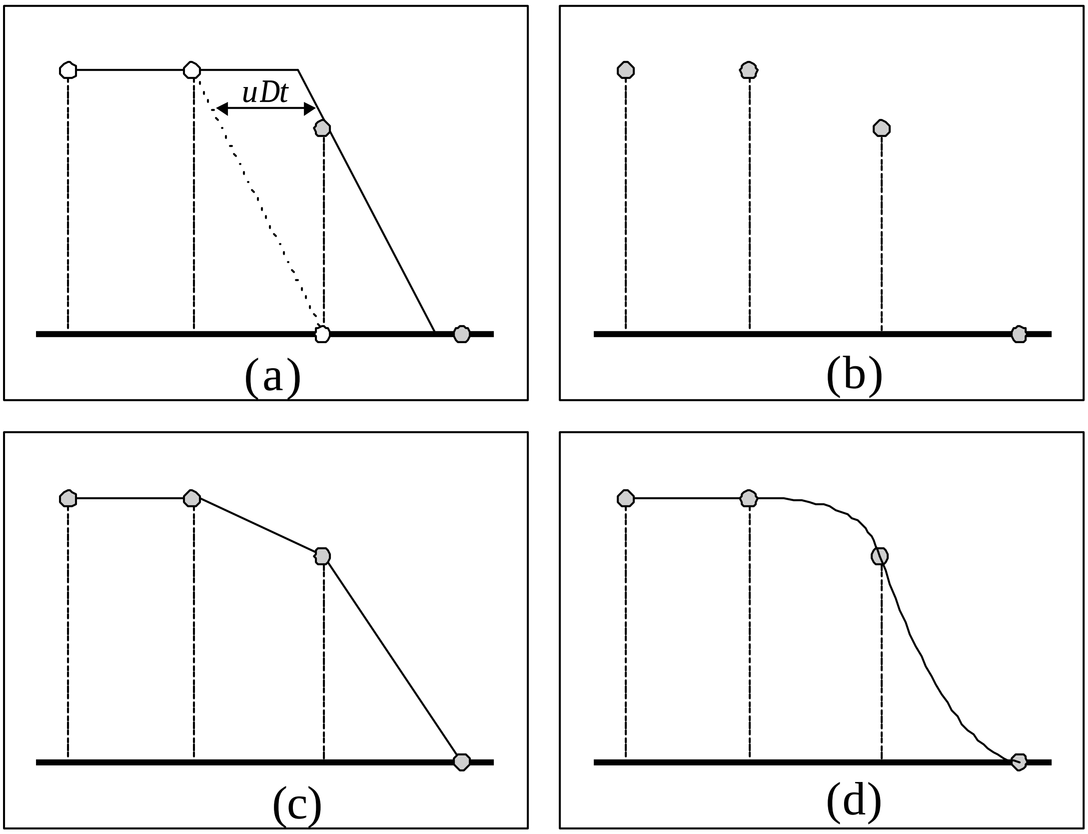


Fig. 1 Modelling of interpolation

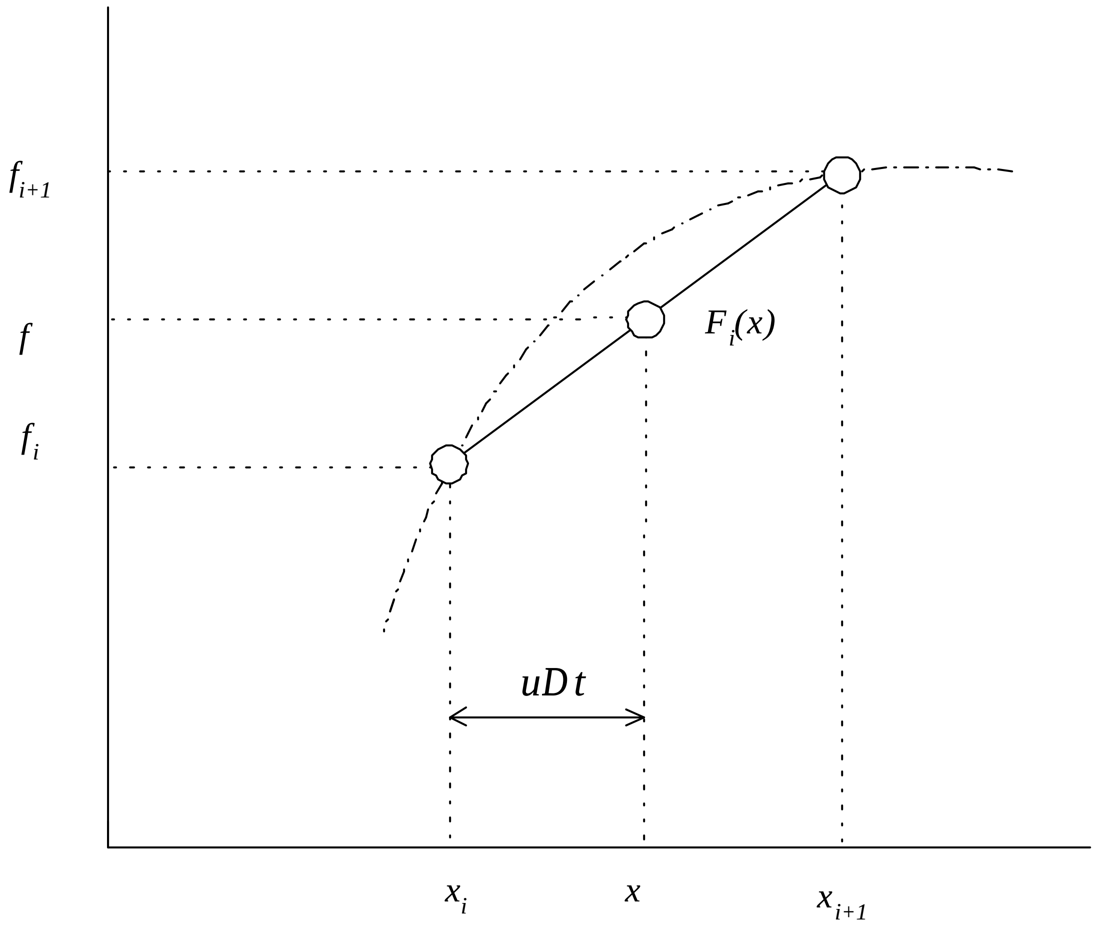


Fig. 2 A linear interpolation

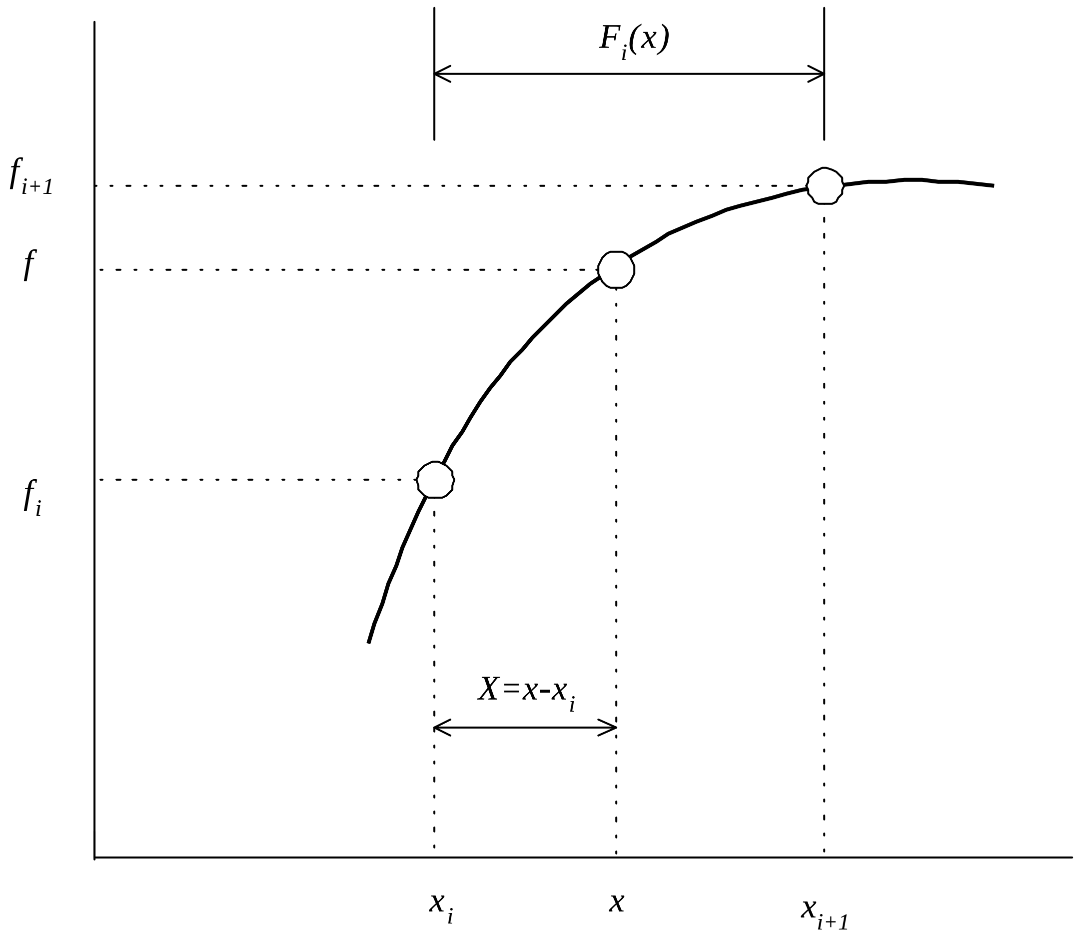


Fig. 3 A spline interpolation

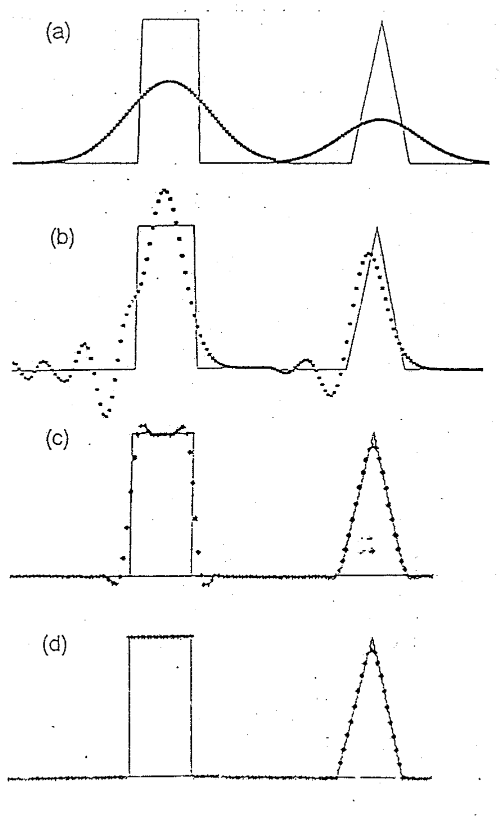
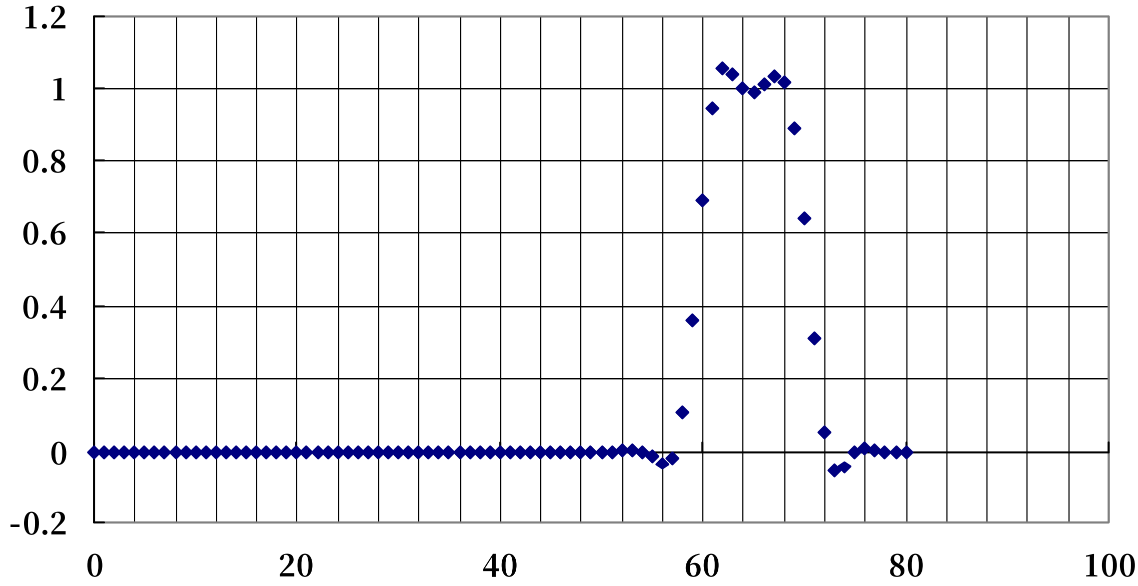


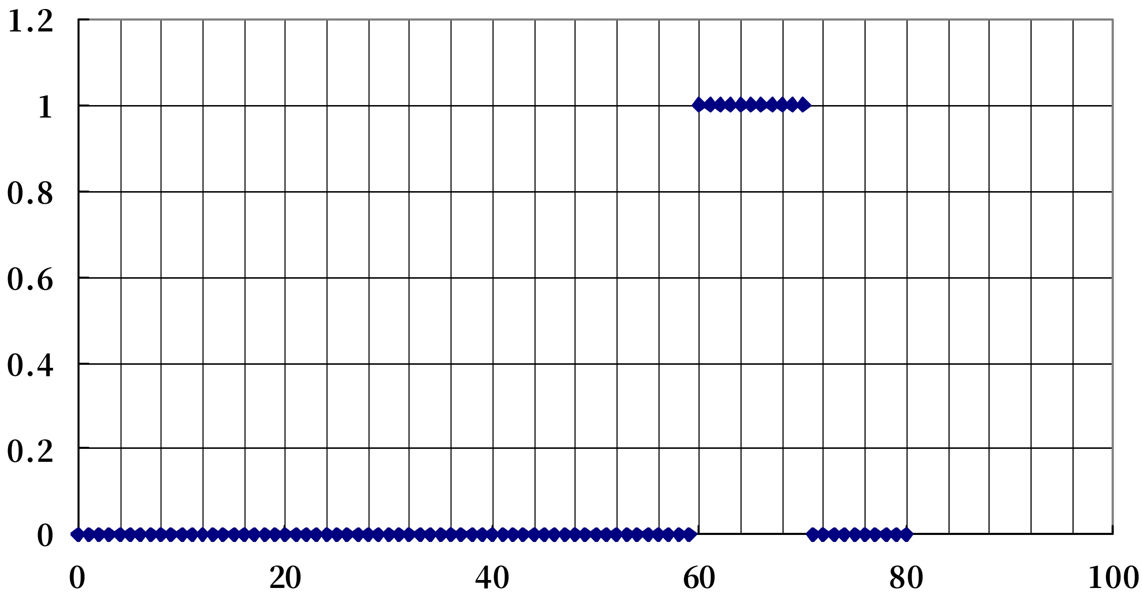
Fig. 4 The profile after 1000 timesteps for each algorithm as initial profile is square and triangle

(a) upwind method (b) Lax-Wendroff method

(c) CIP method (d) CIP method using tangent method



(a) Profile after 500 step



(b) Profile after 500 step with tangent method

Fig. 5 Profile after 500time step as initial profile is square

and profile at same condition with tangent method

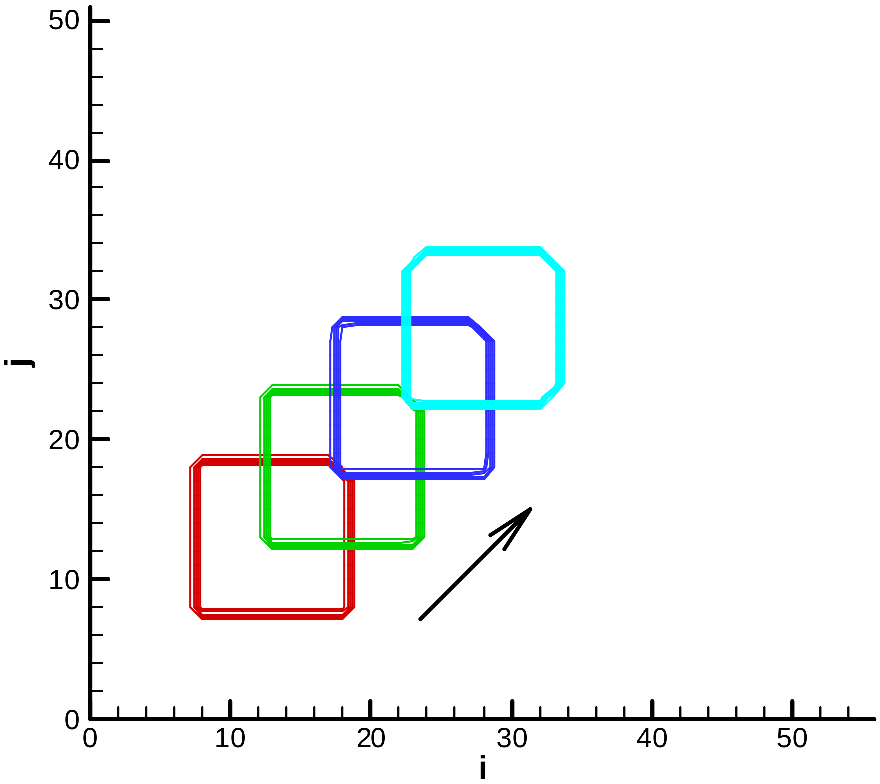


Fig. 6 Profile at each 100 time step when initial profile is square and moving velocity is $u > 0$ and $v > 0$

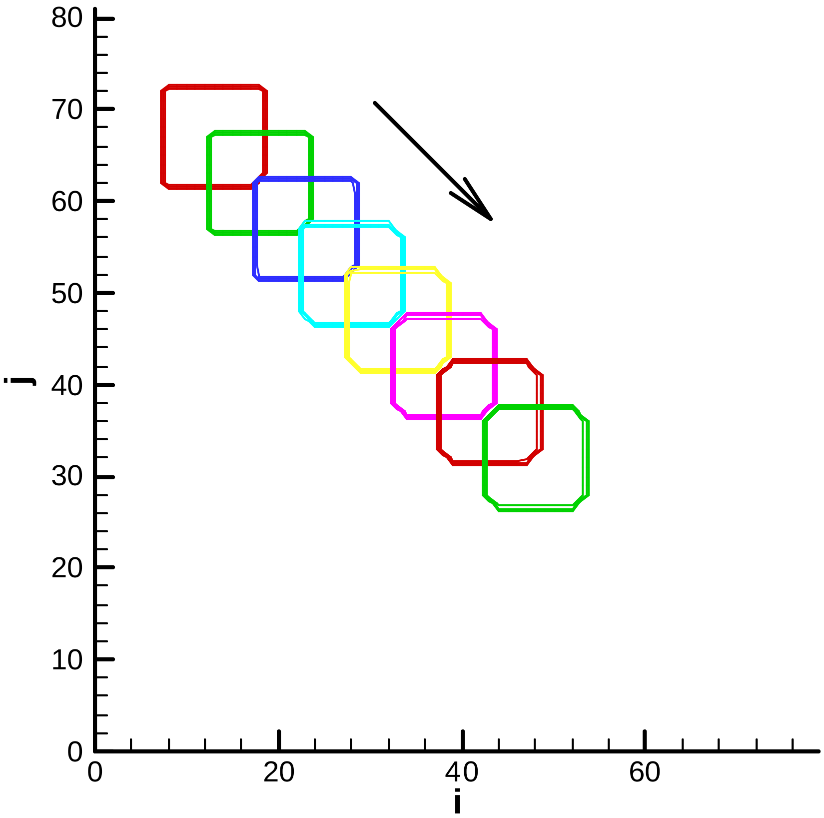


Fig. 7 Profile at each 100 time step when initial profile is square and moving velocity is $u > 0$ and $v < 0$

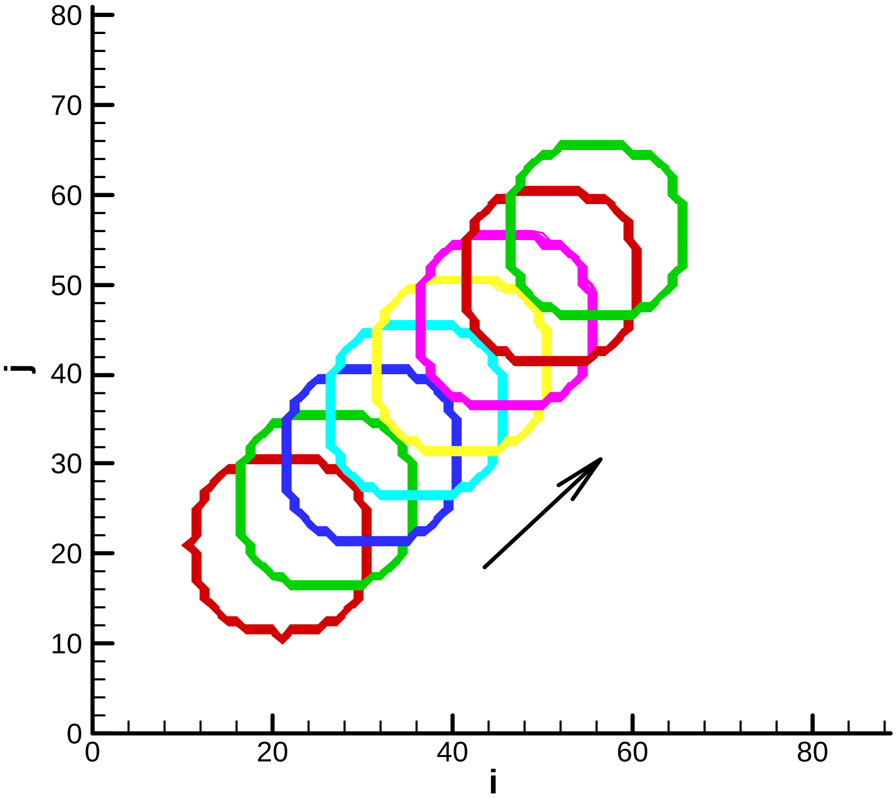


Fig. 8 Profile at each 100 time step when initial profile is circle

and moving velocity is $u > 0$ and $v > 0$

3. 캐비티문제의 적용

3.1 해석모델과 경계조건

Fig. 9 에 보이는 것처럼 정사각형 용기 내에 양 측면과 하벽면이 고정벽면이고 상벽면이 일정한 속도로 이동하는 캐비티유동을 해석하였다. 상벽면이 일정한 속도로 이동하면서 발생하는 정사각형 용기 내의 유동을 계산한다. 주로 계산은 상벽면의 이동속도는 0.005m/s 로, 이때의 Reynolds number 는 210 의 조건에서 수행하였다. 캐비티유동에서 열전달이 없다고 가정하면 온도장을 고려하지 않아도 되므로, 순수한 유체장만을 고려한다. 격자의 수는 22×22 에서 예비계산을 했으며 결과의 신뢰성검증을 위해서 격자의 수를 62×62 까지 증가하여 계산했다. 2 차원 직교좌표계에서 x, y 모두 등간격의 격자를 사용하였다. 경계조건은 고정된 세 개의 벽면에서 속도항(u, v)는 0 이며 이동벽면에서는 v=0 이나 u 는 일정속도인 조건을 설정했다.

3.2 지배방정식

계산에 사용된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial r}{\partial t}+u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}=-r\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{79}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x}+n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{80}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial y}+n\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{81}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}=-g\,p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{82}$$

3.3 수치해석방법

지배방정식인 식(79)는 질량보존의 법칙을 나타내는 식으로, 캐비티유동에서 유체에 큰 밀도변화가 생긴다고는 할 수 없으므로 수치계산에서는 식(79)를 계산하지 않는다. 캐비티유동은 점성에 의한 전단력이 유체의 흐름을 결정하므로 점성항을 어떻게 처리할 것인가에 중점을 두었다.

먼저 계산은 지배방정식을 대류단계와 비대류단계로 분리한다.

식(80)을 예로 들면 다음과 같이 분리할 수 있다.

$$\text{대류단계:}\quad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{83}$$

$$\text{비대류단계:}\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x}+n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{84}$$

C-CUP 법은 비대류단계에서 압력 Poisson 방정식을 풀고 그 결과를 이용해서 속도를 보정하는 방법을 쓴다. 이때 식(84)의 우변에서 두 번째 항인 $n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$은 앞에서 설명했듯이 $\vec{Q}_u$ 에 해당되므로 Poisson 방정식을 구성하기 위해 운동량방정식인 식(84)에 발산을 취하는 부분에는 포함시키지 않고 계산하는 것이 핵심사항이다. 즉 Poisson 방정식을 구성하는 데 다음의 식만을 사용한다.

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{Dt} = -\frac{\nabla p^*}{r^n} \qquad (85)$$

식(85)에 발산을 취하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있는데

$$\frac{\nabla \cdot \vec{u}^* - \nabla \cdot \vec{u}^n}{Dt} = -\frac{\nabla^2 p^*}{r^n} \qquad (86)$$

식(86)식을 $\nabla \cdot \vec{u}^*$ 에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{u}^* = -\frac{\nabla^2 p^*}{r^n} Dt + \nabla \cdot \vec{u}^n \qquad (87)$$

압력으로 표시된 에너지방정식의 차분식을 다음과 같이 된다.

$$\frac{p^* - p^n}{Dt} = -g\, p^n \nabla \cdot \vec{u}^* \qquad (88)$$

식(87)식을 식(88)식에 대입하고 정리하면 압력에 대한 Poisson 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\nabla^2 p^*}{r^n} = \frac{\nabla \cdot \vec{u}^n}{Dt} + \frac{p^* - p^n}{g\, p^n Dt^2} \qquad (89)$$

식(89)에서 우변의 두 번째 항 $\frac{p^* - p^n}{g\, p^n Dt^2}$ 에 대해 생각하면, 음속 $C_s = \sqrt{\frac{g\, p}{r}}$ 이므로 $g\, p^n = C_s^2\, r$ 이라고 바꾸어 쓸 수 있다.

캐비티유동은 비압축성, 점성유동이라고 가정할 수 있으므로 비압축성에서는 음속이 무한히 크다. 따라서 음속이 분모에 있는 식(89)의 우변의 두 번째 항은 0 이 된다. 그 결과 실제의 Poisson 방정식의 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\nabla^2 p^*}{r^n} = \frac{\nabla \cdot \vec{u}^n}{Dt} \qquad (90)$$

식(90)이 본래의 Poisson 방정식인 식(89)보다 계산에 훨씬 유리한 형태가 되

었으나 다른 부가적인 조건은 없고 단지 상벽면의 움직임에 따라 발생하는 유동을 해석하는 캐비티유동은 특히 경계조건을 적절하게 부여해야 한다.

여기서 경계조건을 다시 정리하면 다음과 같다.

Fig. 9에서 벽면에 1번부터 4번까지의 번호를 매겼다. 벽면 1, 2, 3에서는 u, v가 모두 0이 되도록 설정되어 있으며 4번의 벽면, 즉 움직이는 상벽면에서는 $v = 0$이지만 u는 일정한 이동속도를 가진다.

또한 계산에서 해를 빠르게 수렴시키기 위한 하나의 조건으로 Dx와 Dt의 관계도 매우 중요하다. 미분방정식의 형태인 지배방정식을 이산화하는 단계에서 여러 수치 오차들이 수반되지만, 안정성의 문제(question of stability)를 고려함으로써 더 이상 오차가 커지지 않고 해에 빨리 수렴할 수 있다.

쌍곡선형 방정식을 풀기 위해 양해법을 사용할 때 수치적 안정을 위해서 제시되는 조건이 Courant-Friedrichs-Lewy, 일명 CFL condition으로 다음과 같다.

$$\left| c \frac{Dt}{Dx} \right| \le 1 \qquad (91)$$

여기서 c는 파동의 이동속도이다.

차분법을 이용해서 식을 전개할 경우 식(91)의 CFL 조건을 만족하는 것이 신속하게 수렴에 도달할 수 있는 조건이다 그러므로 캐비티유동을 해석할 때 처음에는 $Dt = 0.05\,\mathrm{sec}, Dx = 1.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$로 설정하였다. 이때 계산계 내의 최대속도인 상벽면의 이동속도 $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s}$을 대입하면 계산계 내의 최대 CFL 조건은 0.0167이 된다. 1보다 충분히 작은 CFL 조건을 부여한 결과 수렴을 매우 늦출뿐만 아니라 계산 도중에 폭주를 일으키는 요인으로 작용하였다. 이러한 시행착

오를 통하여 안정된 수렴을 위해서는 수렴속도와 상관없이 그 문제에 적합한 값이 존재한다는 것을 알게 되었다. 여기서는 $\left|c\frac{Dt}{Dx}\right|$가 0.25 정도가 되도록 Dx 와 Dt 의 크기를 설정하였다.

비대류단계에서 압력 Poisson 방정식을 풀었으므로, 이제 계산된 압력으로 속도를 보정한다.

식(84)를 차분의 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$\frac{u^*_{i,j}-u^n_{i,j}}{Dt} = -\frac{1}{r}\frac{p^*_{i,j}-p^n_{i-1,j}}{Dx} + n\left(\frac{u^n_{i+1,j}-2u^n_{i,j}+u^n_{i-1,j}}{Dx^2}+\frac{u^n_{i,j+1}-2u^n_{i,j}+u^n_{i,j-1}}{Dy^2}\right) \qquad (92)$$

식(92)에서 우변의 첫 번째 항 $-\frac{1}{r}\frac{p^*_{i,j}-p^n_{i-1,j}}{Dx}$ 을 이산화할 경우에 차분의 형태를 중심차분으로 선택하면 해는 수렴하지만 물리적으로 타당하지 않는 결과가 나오므로, 속도의 계산에서 차분의 형태를 선택할 때는 전진차분 혹은 후진차분을 사용하는 것이 일반적이다.

여기까지의 계산이 비대류단계의 계산이다. 계산된 결과가 경계조건을 위반하지 않도록 경계조건을 다시 적용해 주는 것도 수렴을 촉진시키는 방법이 된다.

대류단계의 계산에서도 계산방법의 처음에 언급한 것처럼 밀도의 계산은 수렴을 오히려 늦게 할 수 있으며 계산결과에 영향을 미치지 않으므로 밀도의 계산은 생략한다.

비대류단계에서 계산된 $r^*_{ij}, u^*_{i,j}, v^*_{i,j}, p^*_{i,j}$ 를 CIP 법을 이용해서 계산한다. 엇갈림 격자계를 사용하고 있으므로 속도를 계산할 때는 다음의 값을 사용한다.

- x 방향의 속도 u 의 계산에 사용하는 속도.

$$u = u^n_{i,j}, v = \left(\frac{v^n_{i+1,j+1/2} + v^n_{i+1,j-1/2} + v^n_{i,j+1/2} + v^n_{i,j-1/2}}{4} \right) \tag{93}$$

● y 방향의 속도 v 의 계산에 사용하는 속도.

$$u = \left(\frac{u^n_{i+1/2,j+1} + u^n_{i-1/2,j+1} + u^n_{i+1/2,j} + u^n_{i-1/2,j}}{4} \right), v = v^n_{i,j} \tag{94}$$

● 압력의 계산에 사용하는 속도.

$$u_{i,j} = \left(\frac{u^n_{i+1/2,j} + u^n_{i-1/2,j}}{2} \right), v_{i,j} = \left(\frac{v^n_{i,j+1/2} + v^n_{i,j-1/2}}{2} \right) \tag{95}$$

2 차원에서 $f^{n+1}_{i,j}$ 는 2.3.3 절에서 설명하였듯이 다음과 같은 형태를 적용하였다.

$$\begin{aligned} f^{n+1}_{i,j} &= \left[\left(A1_{i,j} x + A2_{i,j} h + A3_{i,j} \right) x + A4_{i,j} h + \partial_x f^*_{i,j} \right] x \\ &+ \left[\left(A5_{i,j} h + A6_{i,j} x + A7_{i,j} \right) h + \partial_y f^*_{i,j} \right] h + f^n_{i,j} \end{aligned} \tag{96}$$

먼저 $\partial_x r^*, \partial_y r^*, \partial_x u^*, \partial_y u^*, \partial_x v^*, \partial_y v^*, \partial_x e^*, \partial_y e^*$ 를 계산하고 각각에 대해서, 즉 속도에 CIP 법을 적용하여 $u^{n+1}_{i,j}, v^{n+1}_{i,j}$ 를 구하고, 압력에 CIP 법을 사용해서 $p^{n+1}_{i,j}$ 를 구한다. 한 시간스텝의 계산이 끝나면 다시 경계조건을 부여하고(본 계산에서는 동일함) 전시간스텝에서 계산된 $r^{n+1}_{i,j}, u^{n+1}_{i,j}, v^{n+1}_{i,j}, p^{n+1}_{i,j}$ 를 $r^n_{i,j}, u^n_{i,j}, v^n_{i,j}, p^n_{i,j}$ 으로 바꾸어 다음 시간스텝에서의 값을 계산한다.

3.4 결과 및 고찰

상벽면이 이동함으로써 정사각형 용기내의 와동(vortex)이 발생하는 캐비티유동을 열유체 방정식의 범용해법인 C-CUP 법을 이용하여 계산했다.

CIP 법으로 계산된 결과의 신뢰성을 검토하기 위해 SIMPLE 을 이용하여 동일한 조건으로 계산을 수행하였고, 그 결과를 CIP 법으로 계산한 결과와 비교하였다.

Fig. 10 의 격자계는 2 차원 직교좌표계에서 등간격의 격자로 구성하였다.

Re=210 인 격자 22×22 에서의 속도벡터를 Fig. 11 에 보인다. 왼쪽의 그림은 CIP 법의 결과이며, 오른쪽의 그림은 SIMPLE 의 결과이다. 전체적으로 매우 잘 일치하는 경향을 보이고 있다. 그러나 와동의 중심위치가 CIP 법의 경우가 SIMPLE 의 경우보다 조금 우상(右上)에 위치하는 모습을 보이고 있다.

격자수가 증가된 경우에도 와동의 중심위치는 거의 유사하다. Fig. 13 는 Re=500 인 격자 32×32, Fig. 15 는 Re=210 인 격자 42×42 의 속도분포를 보인 것이다.

또한 Fig. 12 는 Re=210 인 격자 22×22, Fig. 14 는 Re=500 인 격자 32×32 에서의 유선을 나타낸 것이며, Fig. 16 은 Re=210 인 격자 42×42 그리고 Fig. 17 은 Re=210 인 격자 62×62 에서의 유선을 보인 것이다. 이를 통하여 전체적인 경향은 역시 잘 일치하는 모습을 보여주지만 앞에서 지적한 와동의 중심위치는 역시 CIP 의 경우가 조금 더 우상에 위치하는 것을 확인할 수 있다.

조금 더 정확한 비교를 위해 Fig. 18 에 화살표로 표시된 두 개의 선상 ($y = 3.9\times10^{-2}$ m, $y = 2.4\times10^{-2}$ m)에 대해서 x 방향 속도 u 에 관해 정량적인 비교

를 해 보았다. 그 결과가 Fig. 18 로서 전체적인 경향은 일치하지만 와동의 중심부에서는 최대 15%정도의 차이가 발생했다.

잘 알려져 있는 SIMPLE 과의 직접적인 비교는 그 자체로 가치있는 일이나, 어느 쪽이 실제의 실험결과에 보다 더 접근하는지에 대해서는 검토하지 못하였다. 모든 수치해석의 모델링에는 다양한 수치오차를 포함하게 되므로 이에 대해서는 후에 충분히 정밀하게 검토해 볼 필요가 있다.

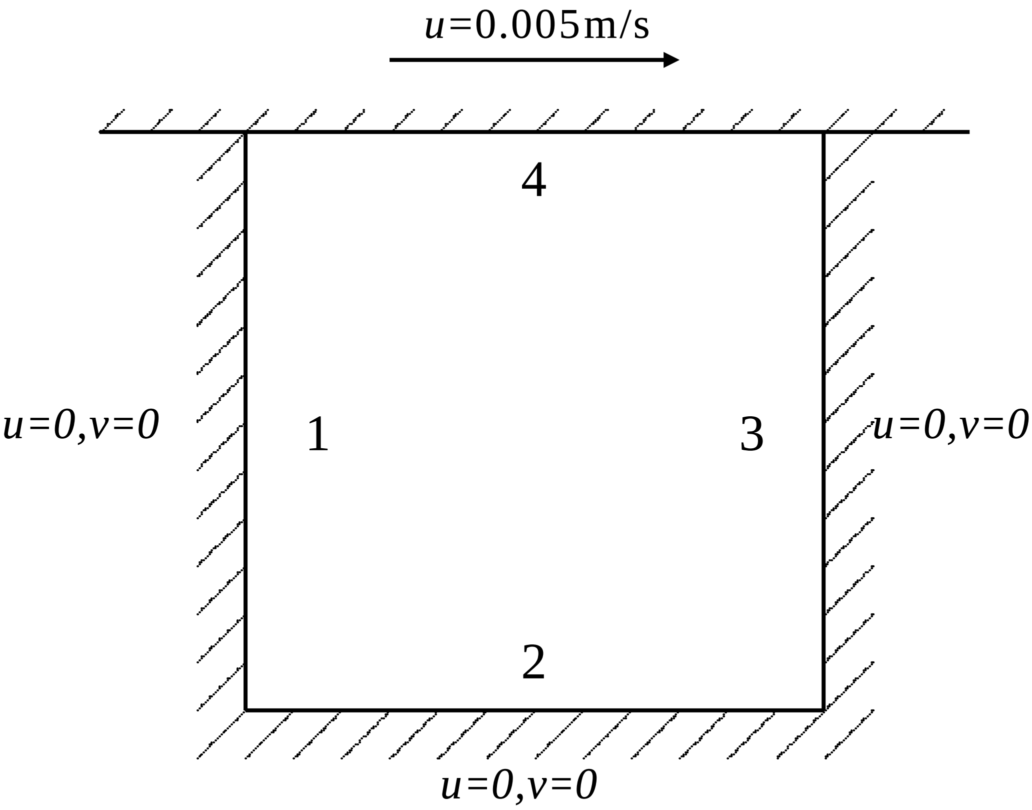


Fig. 9 Schematic diagram with boundary conditions

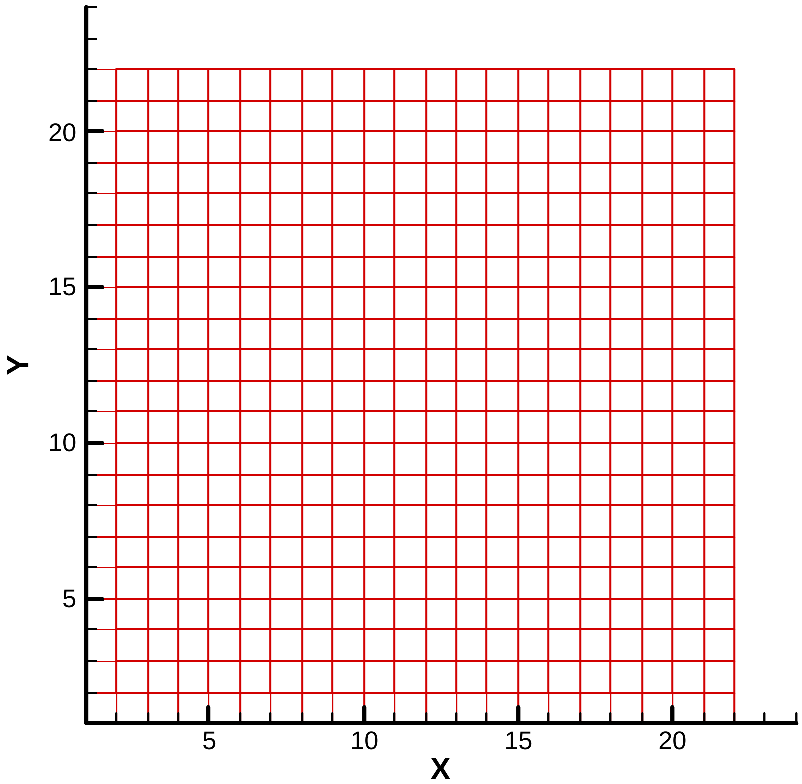


Fig. 10 Grid

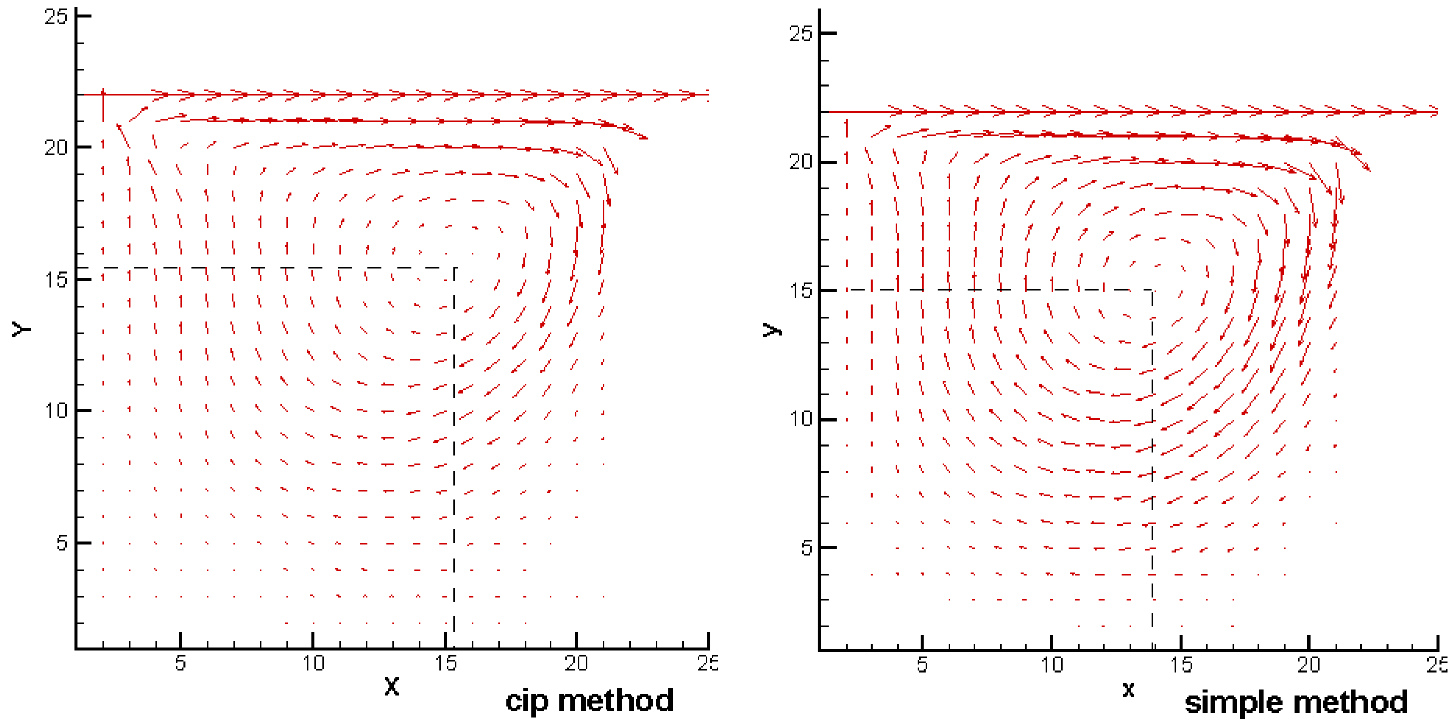


Fig. 11 Distribution of velocity vectors in cavity at Re=210 by 22×22

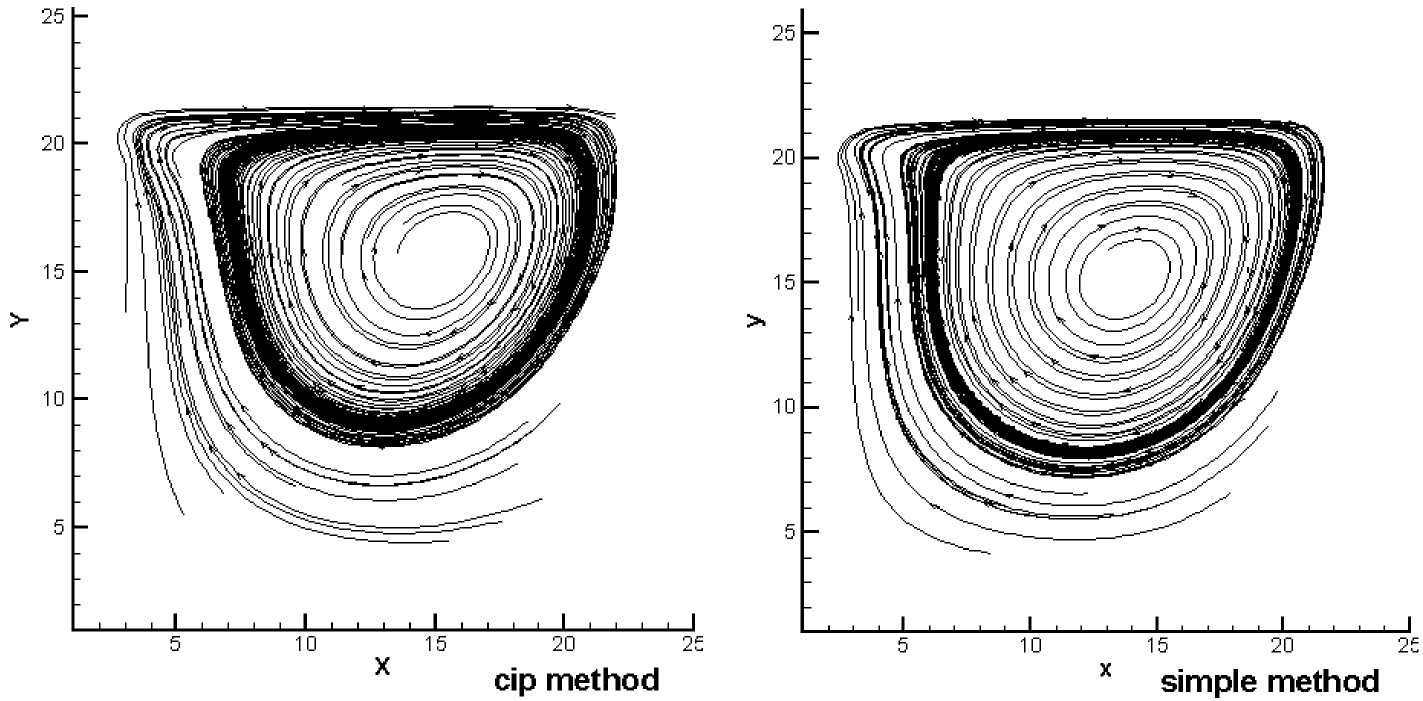


Fig. 12 Distribution of streamline in cavity at Re=210 by 22×22

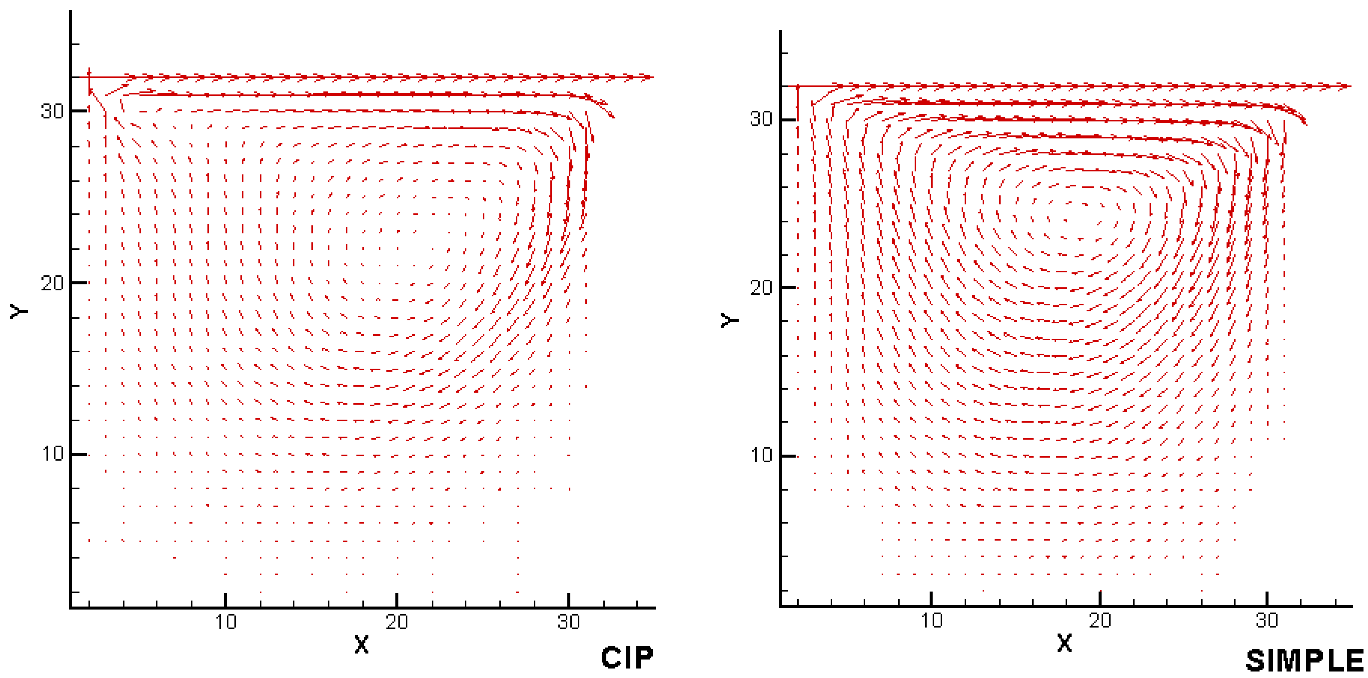


Fig. 13 Distribution of velocity vectors in cavity at Re=500 by 32×32

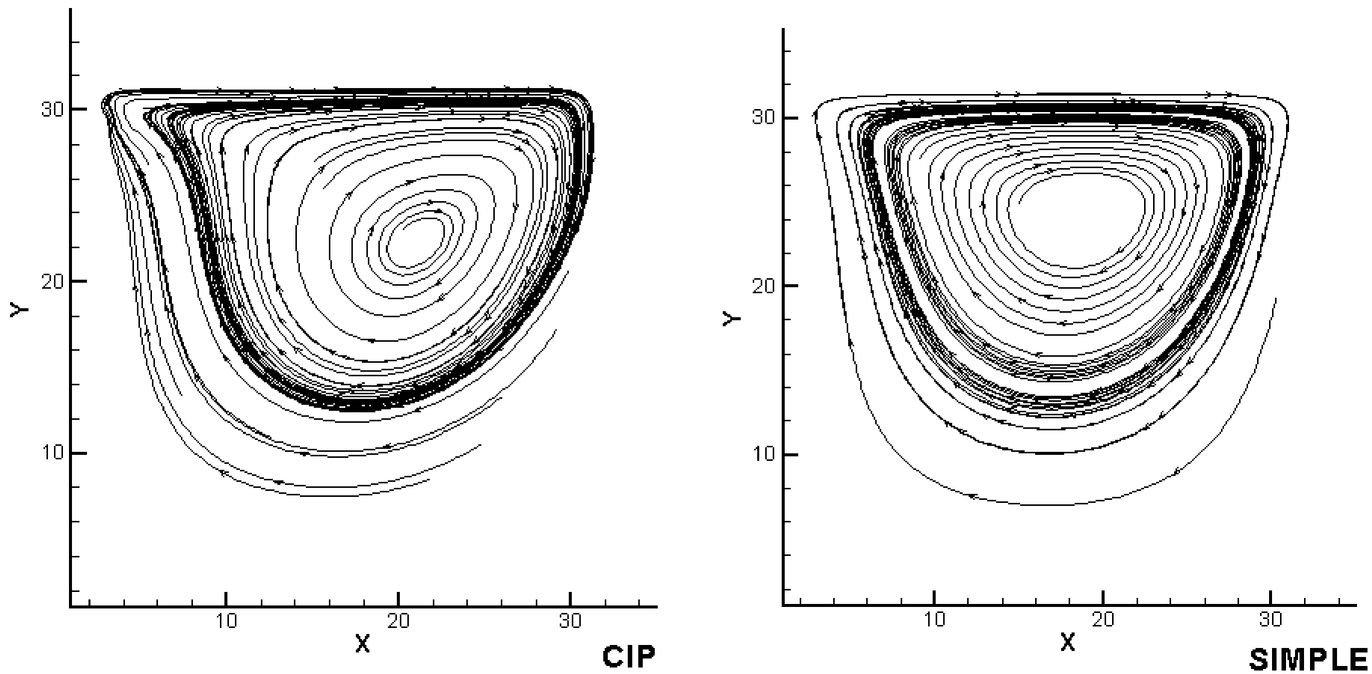


Fig. 14 Distribution of streamline in cavity at Re=500 by 32×32

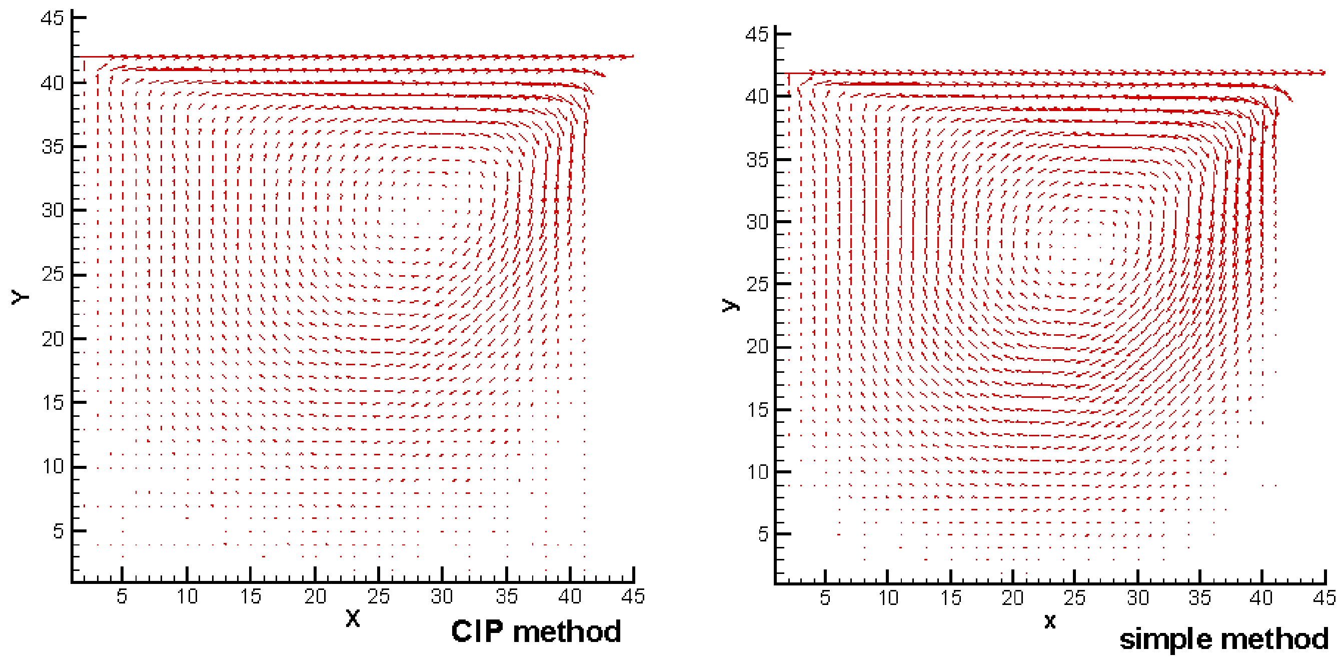


Fig. 15 Distribution of velocity vectors in cavity at Re=210 by 42×42

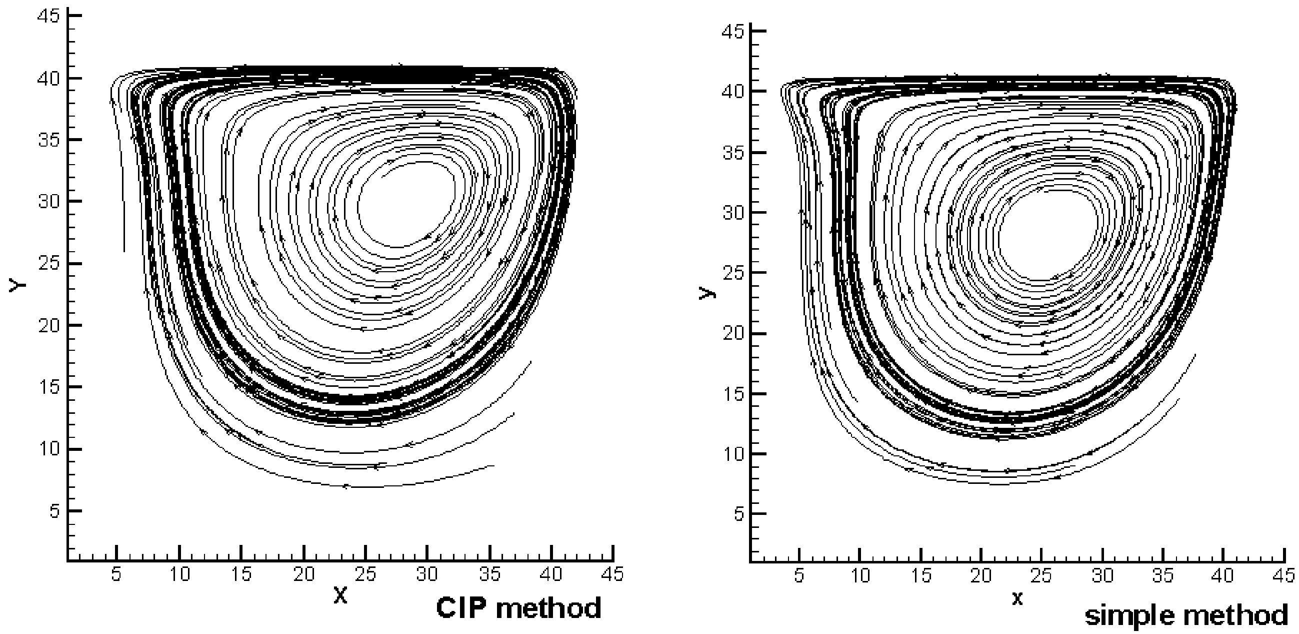


Fig. 16 Distribution of streamline in cavity at Re=210 by 42×42

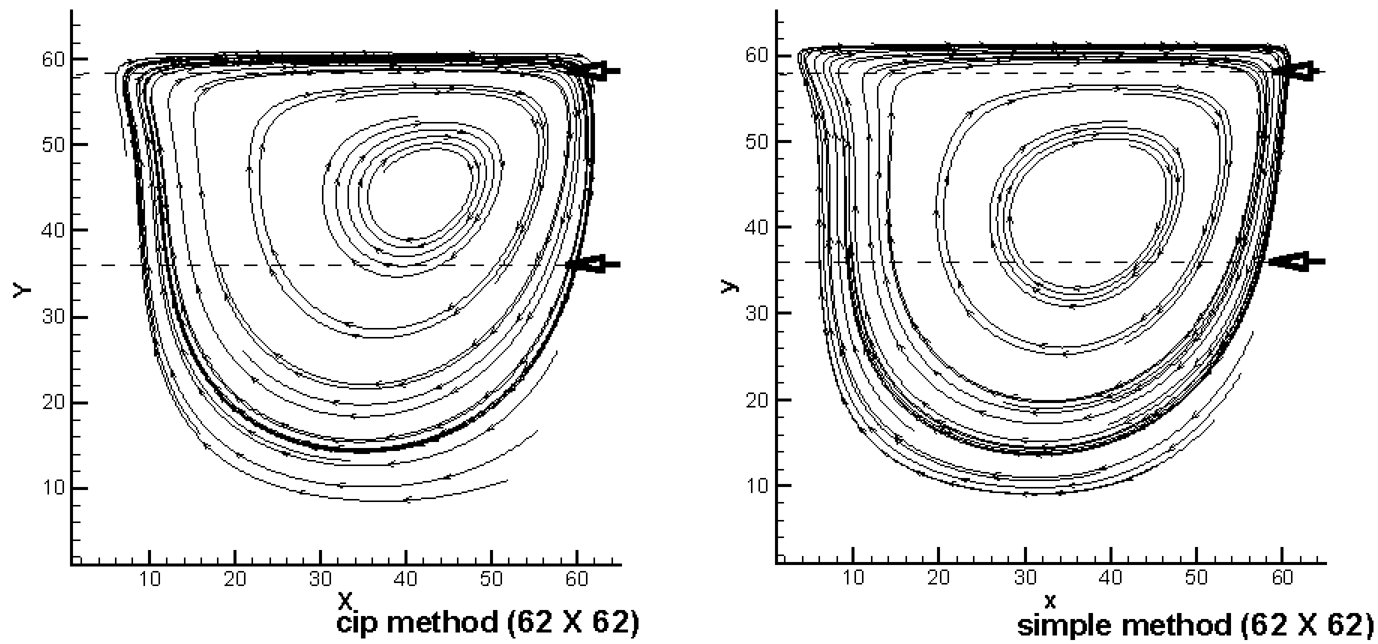
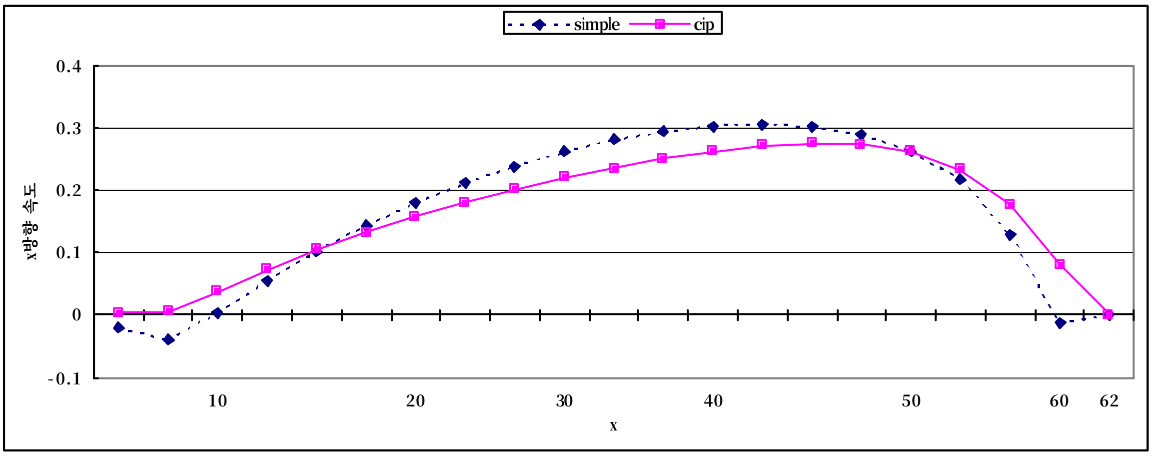


Fig. 17 Distribution of streamline in cavity at Re=210 by 62×62



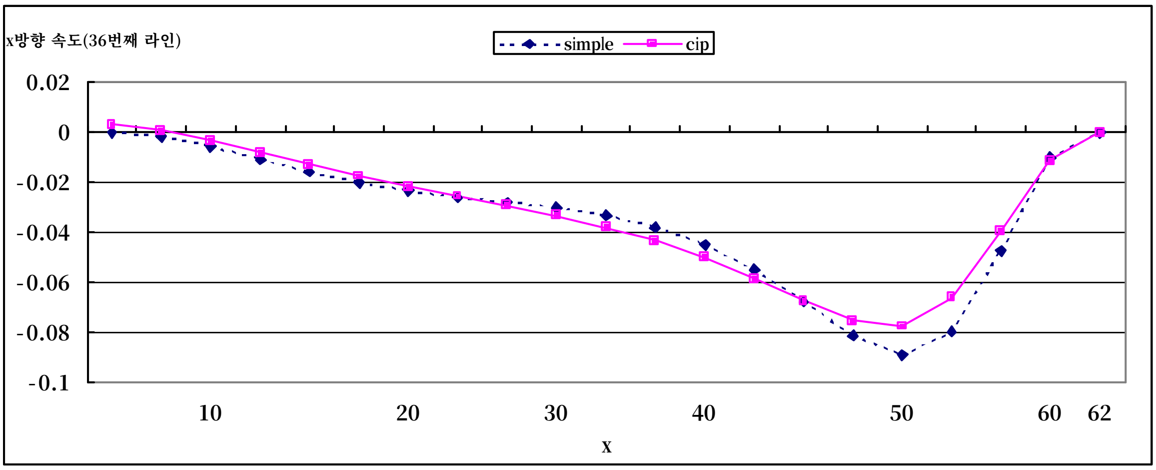


Fig. 18 Comparison of *u* with CIP method and SIMPLE at y=3.9cm and 2.4cm

4. 댐의 붕괴과정

4.1 해석모델과 경계조건

수치계산에서 자유표면의 정확한 위치를 아는 것은 매우 어려운 일이므로 기존의 수치해법에서는 복잡한 경계조건을 부여하여 자유표면의 위치를 계산하였다.

MAC 법에서는 자유표면에서의 계산을 위해서 표면의 수직응력조건을 사용해서 계산된 인접한 계산셀(cell)에서의 압력을 직선보간하여 다시 표면의 압력을 계산하는 복잡한 방법을 쓰고 있으며, 만약 자유표면이 이동하여 경계가 변하는 경우 그때마다 다시 계산해야 한다. 이와 같이 경계조건이 복잡하게 주어지므로 매 시간스텝마다 계산량이 방대해지며, 계산영역 주위의 모든 정보를 알고 있어야 하므로 계산시 컴퓨터가 기억해야 할 정보량이 많아지고 그 결과 메모리상의 제약이 따른다. 또한 이를 3 차원으로 확장하는 경우에는 이러한 문제점이 기하적으로 증폭되어 결코 용이하지 않다.

VOF(Volume of fluid)법은 MAC 법과는 달리 경계면의 설정에 변수 하나만을 사용하므로 MAC 법보다 훨씬 적은 기억량을 사용하여 계산할 수 있다. 그러나 표면이 움직이면 시간스텝마다 계속해서 식들을 수정해서 계산을 해주어야 한다. 마찬가지의 이유로 3 차원의 확장에는 많은 제약이 따르게 된다. 또한 복잡한 형상이 나오면 부정확한 결과가 나오기도 한다.

이렇듯 움직이는 경계면을 정확하게 추적하기는 매우 어려우며, 복잡한 경계

조건을 부여해야만 시간에 따라 변화하는 경계면을 계산할 수 있었다. 하지만 C-CUP 법에서는 이동경계에 대한 경계조건을 사용하지 않으며, 오히려 바람 등의 영향으로 기체 부분의 유동이 액체에 직접적으로 영향을 주는 경우에도 쉽게 계산조건에 포함시킬 수 있는 장점을 가지고 있다.

물과 공기가 일정한 경계를 이루고 있다가 갑자기 물을 막고 있던 댐이 붕괴되는 붕괴된 댐(broken dam) 문제는 실험과 여러 수치기법을 통해 계산된 bench mark problem 이므로 C-CUP 법을 이용해서 이를 계산하였다.

Fig. 19 의 그림처럼 물과 공기가 일정한 경계를 이루고 있다가 어떤 순간에 물을 막고 있던 댐이 갑자기 붕괴된다면, 물이 흘러내리게 되고 일정한 경계를 이루던 공기와 물의 경계면이 이동하게 된다. 이러한 경우에 물과 공기의 경계면이 물이 유동함에 따라 어떻게 형성되는가를 수치계산을 통해서 고찰하도록 한다.

계산에 사용된 좌표계는 직교좌표계이며 격자수는 20×40 을 사용했다. x, y 모두 등간격의 격자를 사용하였고 시간스텝은 0.05sec 으로 하였으며 공기중의 비열비는 1.4 로 설정하였다. 공기의 밀도는 0.001g/cm^{3}이고 물의 밀도는 1.0g/cm^{3}이며, 초기의 속도분포는 물과 공기 모두 0 으로 설정하였으며 물에도 정수압의 분포를 적용했다.

Fig. 19 에 표시된 것처럼 1 번과 3 번의 양 측면은 댐이 붕괴될 경우에 물의 입구와 출구에 해당되는 부분으로 더 이상의 유체의 유입이 없다고 가정하고 경계조건으로 속도를 0 으로 설정하였다. 4 번의 윗면과 2 번의 아랫면 역시 속도를 0 으로 설정했다.

4.2 지배방정식

계산에 사용된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial r}{\partial t}+u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}=-r\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{97}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x}-g \tag{98}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{99}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}=-g\,p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{100}$$

4.3 수치해석방법

댐이 붕괴될 때 일어나는 물의 갑작스런 유동은 점성력에 의한 영향이 크지 않으므로 점성항을 무시한다. 그러나 수치계산시 발산의 우려가 있으므로 계산에서 인공점성항을 첨가하였으며 이것이 점성항의 역할을 하게 된다.

인공점성항은 2.3.2 절의 1 차원의 C-CUP 법에서 소개되었던 식(58)을 사용한다.

$$\begin{aligned} q_i &= a\left(-r_i C_s Du+\frac{g+1}{2}r_i Du^2\right) \quad if \quad Du<0 \\ &= 0 \qquad if \quad Du \geq 0 \end{aligned} \tag{101}$$

계산의 순서는 초기에 주어진 r^n, u^n, v^n, p^n 를 사용하여 r^*, u^*, v^*, p^* 을 비대류단계에서 계산하고, r^*, u^*, v^*, p^* 을 사용하여 $r^{n+1}, u^{n+1}, v^{n+1}, p^{n+1}$ 을 대류단계에서 계산한다. 그리고 이런 일련의 과정을 계속 반복함으로써 계속된 시간스텝에서

의 값을 계산할 수 있다. 여기서 윗첨자 *는 비대류 단계의 계산이 끝난 후의 값들을 의미하고 윗첨자 n+1 은 대류단계의 계산이 끝난 후의 값으로 한 시간 스텝 진행한 후의 값이다.

먼저 비대류단계의 계산에서 압력을 구해야 하므로 Poisson 방정식을 구성한다. 즉 운동량방정식에 발산을 취하여 압력으로 표시된 에너지방정식에 대입하고 정리한다. x 방향의 속도 u 의 경우 비대류단계의 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x} - g \qquad (102)$$

식(102)식을 앞에서 설명한 C-CUP 법의 기본 방정식과 비교하면 외부에서 작용하는 힘인 중력항이 더 추가되었는데, 중력항은 인공점성항 $\vec{Q}_u$ 에 포함되는 항이 아니고 외부에서 작용하는 힘이 있을 때 식에 추가되는 부분이다.

운동량방정식을 차분하면 다음과 같다.

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{Dt} = -\frac{\nabla p^*}{r^n} - g \qquad (103)$$

Poisson 방정식을 구성하기 위해서 식(103)에 발산을 취하면 다음과 같다.

$$\frac{\nabla \cdot \vec{u}^* - \nabla \cdot \vec{u}^n}{Dt} = -\frac{\nabla^2 p^*}{r^n} \qquad (104)$$

식(103)에서 나타났던 중력항은 발산을 취하므로 0 이 되어서 자연히 소거된다. 식(104)를 다음의 식에 대입하고 정리하면 압력에 대한 Poisson 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{p^* - p^n}{Dt} = -g\ p^n \nabla \cdot \vec{u}^* \qquad (105)$$

식(105)에 식(104)를 대입하고 정리한 Poisson 방정식은

$$\frac{\nabla^2 p^*}{r^n} = \frac{\nabla \cdot \vec{u}^n}{Dt} + \frac{p^* - p^n}{g\ p^n Dt^2} \tag{106}$$

이다.

MAC 법과 비교하면 식(106)은 우변의 두번째 항이 더 첨가된 형태인데 C-CUP 법의 원리에서 설명한 것처럼 두 번째 항은 계산할 때 갑작스런 속도변화가 생겨도 발산하지 않고 수렴이 가능하게 해주는 항이다. 식(106)은 SOR(Successive OverRelaxation)법을 이용해서 풀이했으며 계산에 사용한 완화계수는 0.2 이다.

다음에 계산된 압력으로 속도와 밀도를 보정하는 계산을 한다. 예를 들어 식(102)를 차분의 형태로 바꾸면 다음의 식과 같다.

$$\frac{u^{**} - u^n}{Dt} = -\frac{1}{r}\frac{p^*_{i,j} - p^n_{i-1,j}}{Dx} - g \tag{107}$$

식(107)을 식(92)와 비교하면 x 방향의 속도 u 의 윗첨자가 *가 아니고 **인 것을 알 수 있는데, 이것은 캐비티유동에서는 실제의 점성항을 사용해서 인공점성항의 계산이 포함되지 않았으므로 비대류단계의 계산이 한 번만 수행되었다, 그러나 댐의 붕괴과정의 해석에서는 인공점성항을 첨가하였으므로 비대류단계에서도 2 단계로 계산이 나누어져서 수행된다 그러므로 먼저 식(107)의 차분식을 사용해서 u^{**} 을 계산하고, 다음의 식에 의해서 u^* 를 계산한다.

$$\frac{u^* - u^{**}}{D\,t} = -\left(\frac{xvis_{i+1,j} - xvis_{i,j}}{Dx} \times \frac{2}{r_{i+1,j} + r_{i,j}}\right) \tag{108}$$

여기서 $xvis(i,j)$ 는 인공점성항을 계산한 항이다. 위와 같은 방법으로 밀도 $r^*_{i,j}$,

속도 $u^*_{i,j}$, $v^*_{i,j}$ 및 압력 $p^*_{i,j}$ 을 계산한다.

대류단계의 계산은 CIP 법을 이용하는데 이 경우에 밀도와 압력을 계산할 때와 x 방향의 속도 u 및 y 방향 속도 v 를 계산하는 경우에 각각 초기의 속도가 다르게 적용되어야 한다. 즉 캐비티유동에서와 마찬가지로 식(93), 식(94) 그리고 식(95)를 이용하여 구한다.

초기에 속도를 고려했으므로 이제는 각각의 경우에 CIP 법을 이용해서 한 시간스텝이 지난 후의 값들을 계산할 수 있다.

먼저 $\partial_x r^*, \partial_y r^*, \partial_x u^*, \partial_y u^*, \partial_x v^*, \partial_y v^*, \partial_x e^*, \partial_y e^*$ 를 계산하고 각각에 대해서, 즉 속도에 CIP 법을 적용하여 $u^{n+1}_{i,j}, v^{n+1}_{i,j}$ 를 구하고 압력에 CIP 법을 사용해서 $p^{n+1}_{i,j}$ 를 구한다. 한 시간스텝의 계산이 끝나면 다시 경계조건을 적용해주고 시간스텝에서 계산된 $r^{n+1}_{i,j}, u^{n+1}_{i,j}, v^{n+1}_{i,j}, p^{n+1}_{i,j}$ 를 $r^n_{i,j}, u^n_{i,j}, v^n_{i,j}, p^n_{i,j}$ 으로 바꾸어 다음 시간스텝에서의 값을 계산한다.

4.4 결과 및 고찰

Fig. 22 에 붕괴되는 과정을 보인다. 기존의 MAC[9]이나 VOF[2]에 의한 결과들과 매우 좋은 일치를 보인다. 그러나 기존의 방법들이 액체영역에 대해서만 계산을 수행하게 됨으로써 기액 경계면에 부여하는 복잡하면서도 시간에 따라 변화하는 경계조건이 불필요하게 되었다. 또한 바람 등의 영향으로 기체 부분의 유동이 액체에 직접적으로 영향을 주는 경우에도 쉽게 계산조건에 포함시킬 수 있는 장점은 CIP 법의 가능성을 높여 준다고 생각된다.

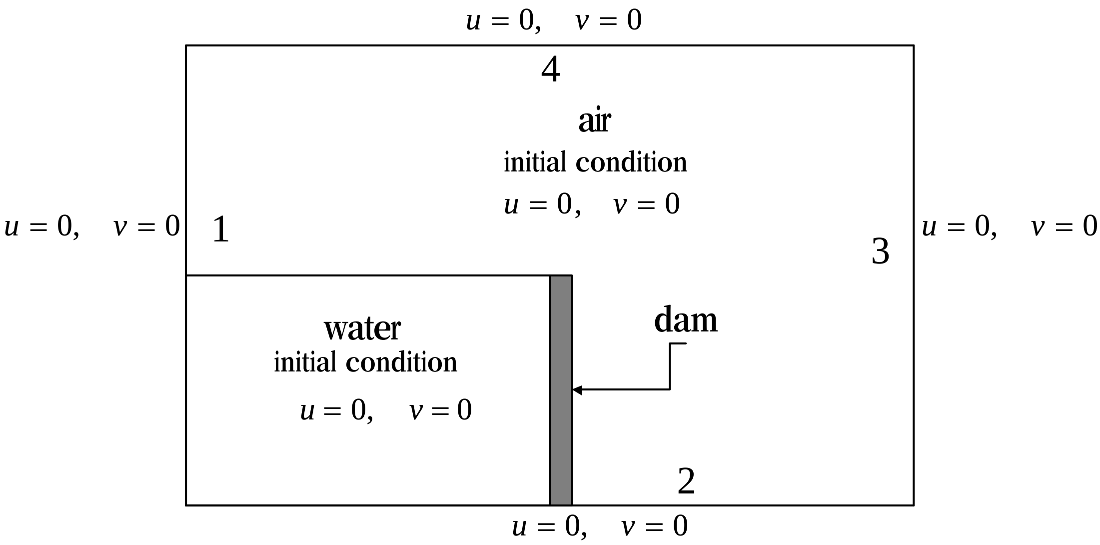


Fig. 19 Schematic diagram with boundary conditions

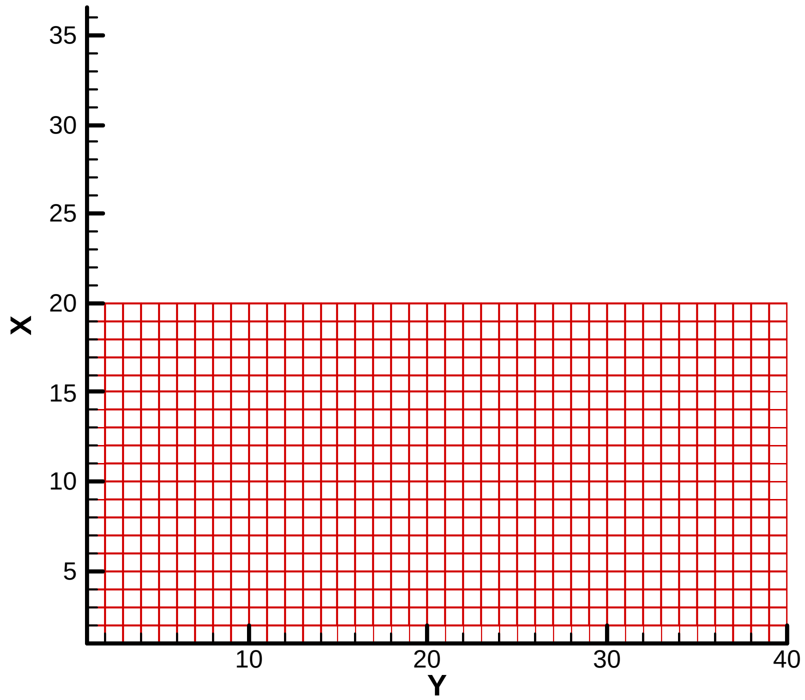


Fig. 20 Grid

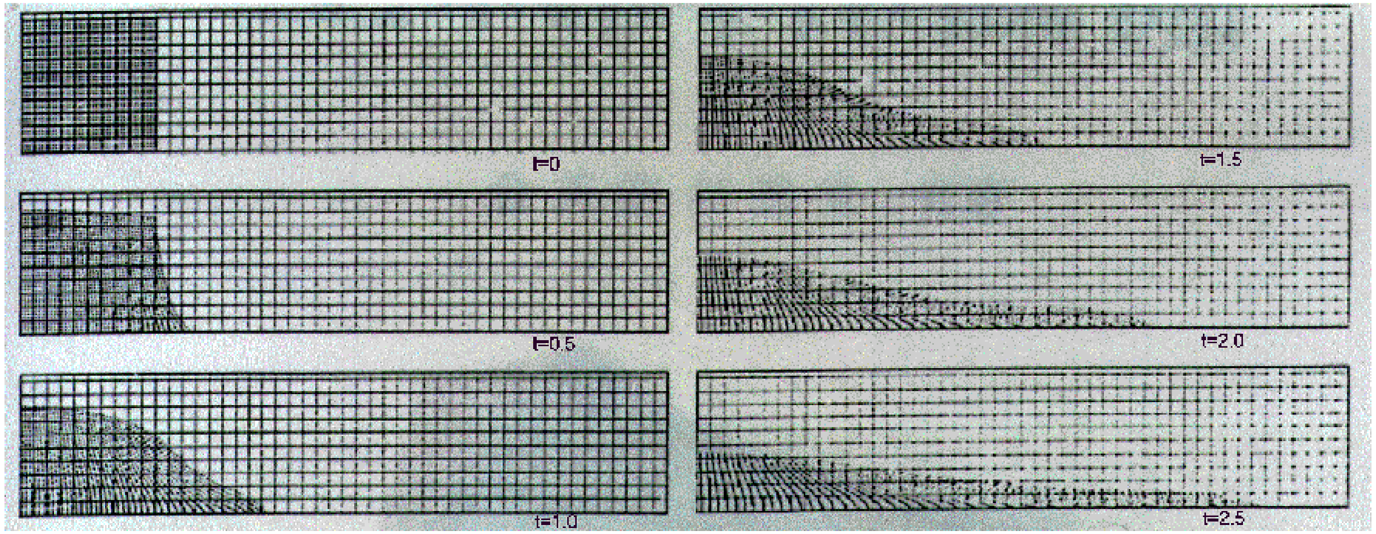


Fig. 21 Fluid configuration of marker particles for the broken dam

at times t=0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5.

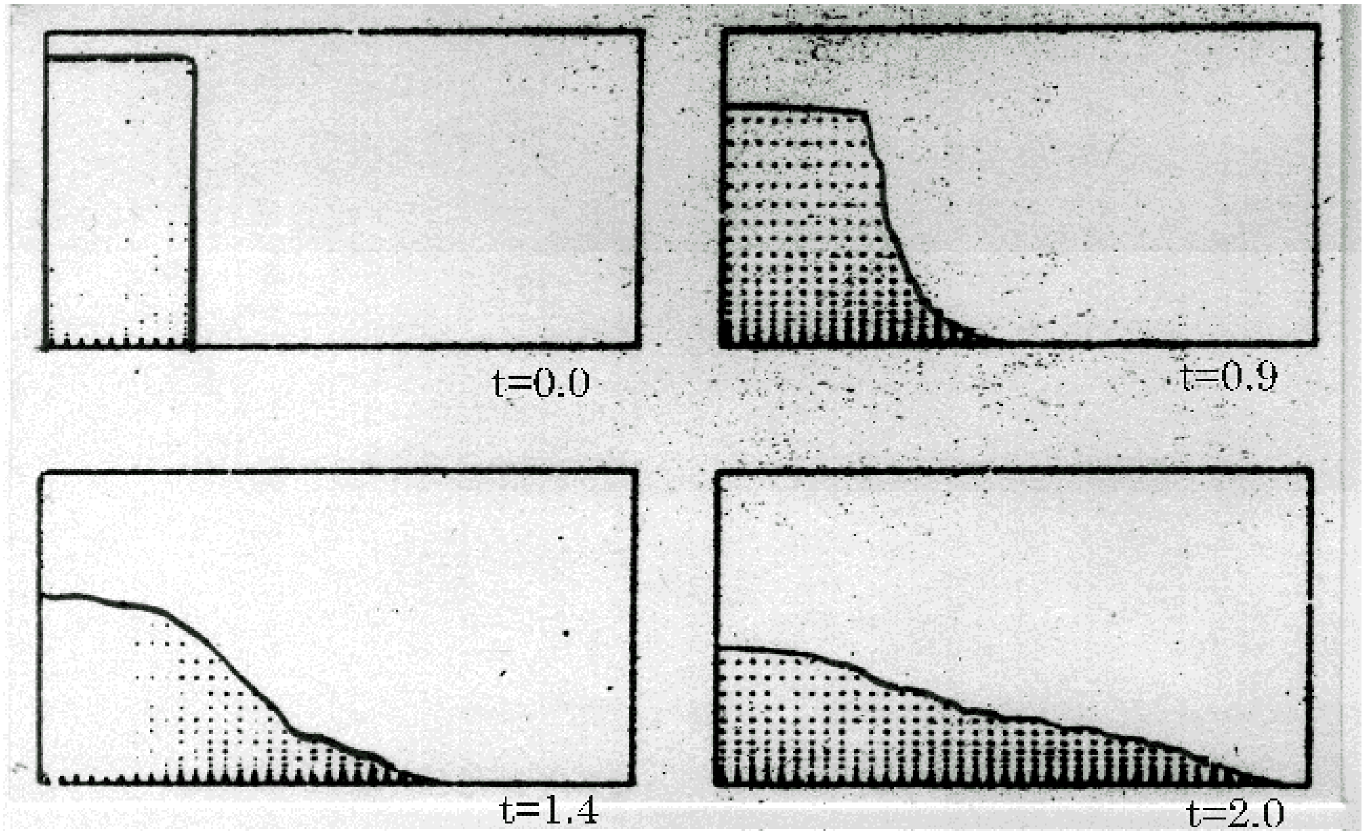


Fig. 22 Velocity vectors and fluid configuration for broken dam problem at times 0.0, 0.9, 1.4, 2.0

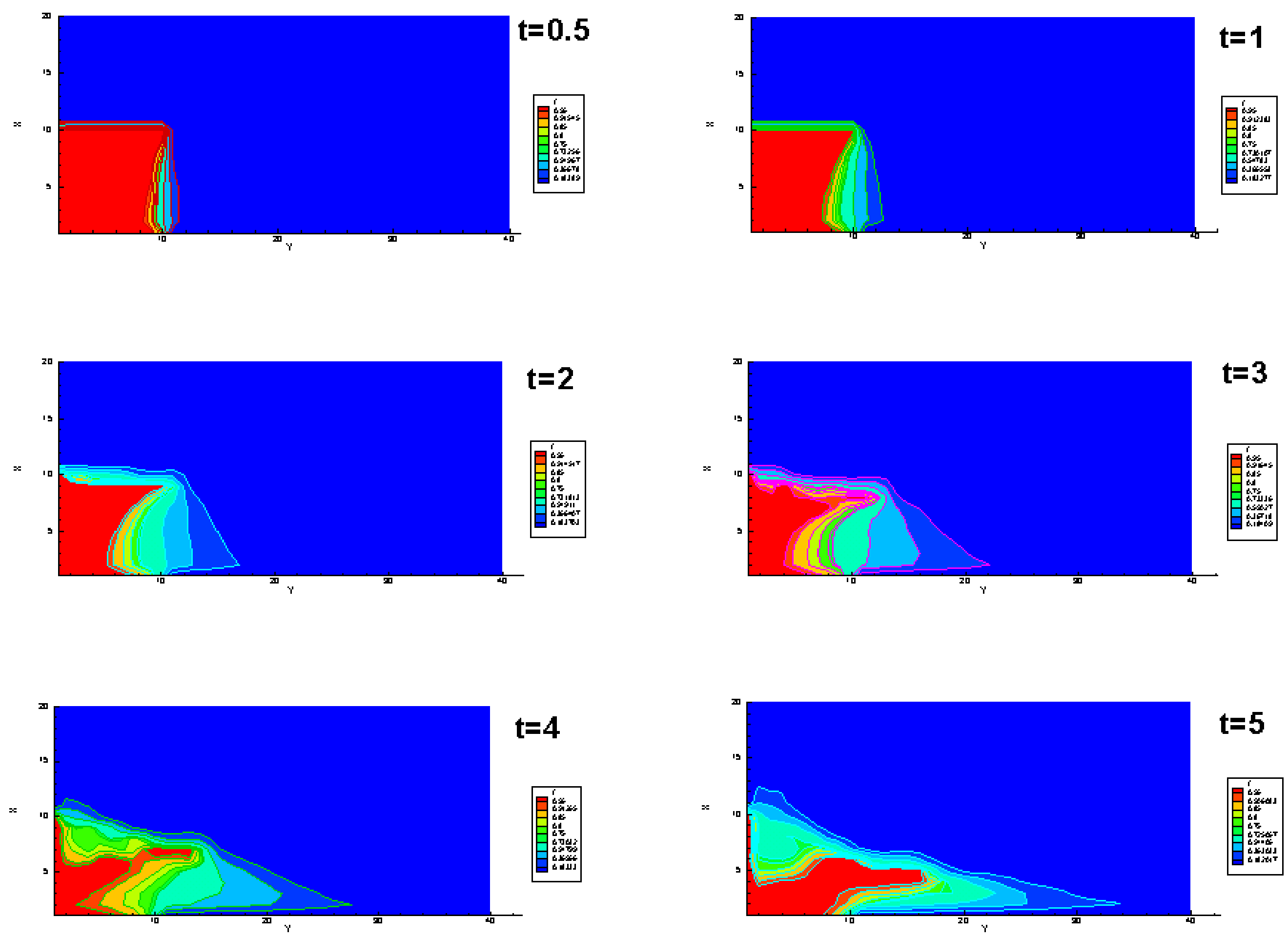
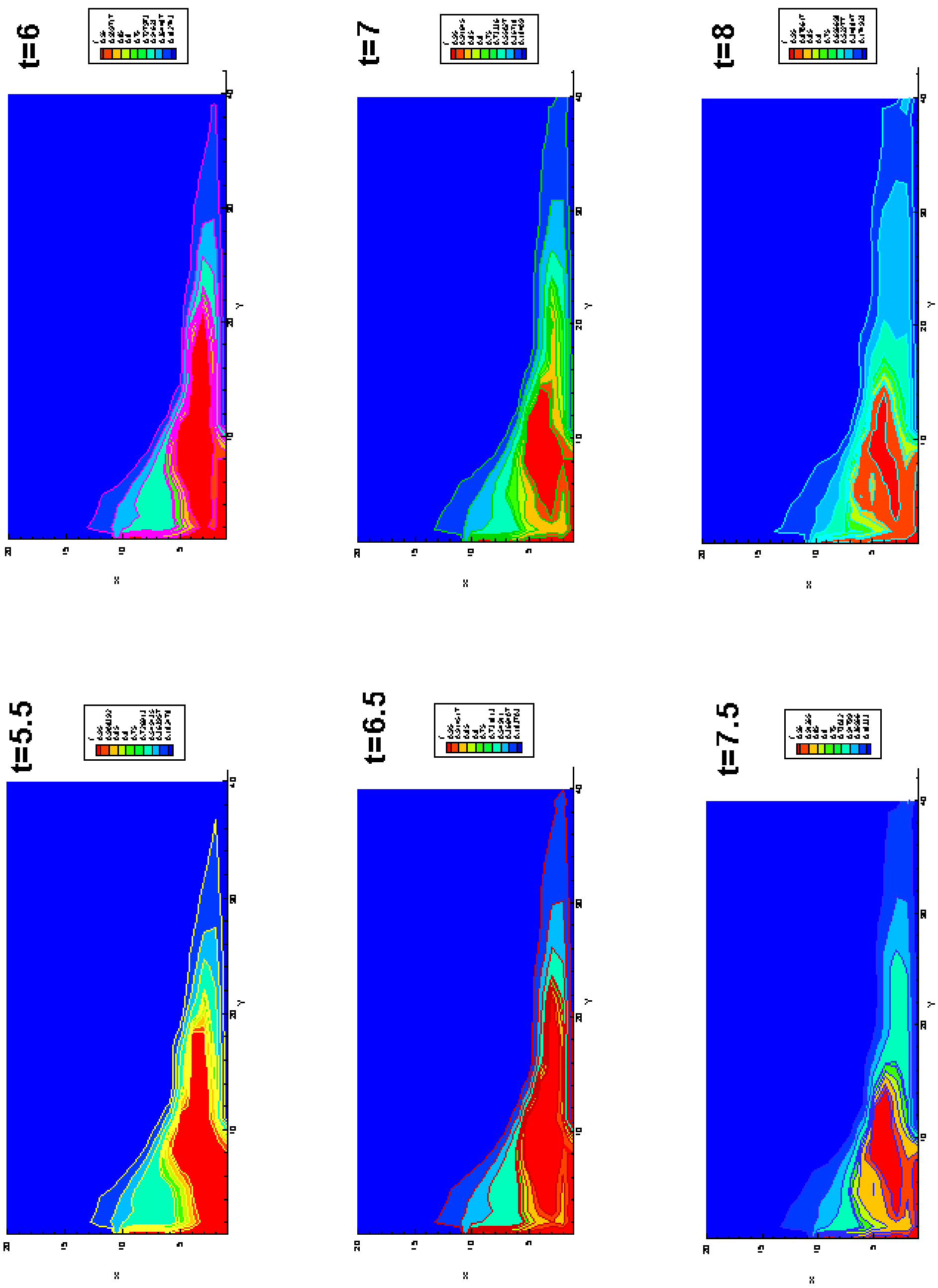


Fig. 23 Density distribution and fluid configuration for broken dam problem


t=6
t=7
t=8
t=5.5
t=6.5
t=7.5

5. 결론

본 연구에서는 압축성 유체와 비압축성 유체를 동시에 처리할 수 있는 새로운 기법인 CIP 법을 이용하여, 실제 다상의 열유동과 상변화 현상의 해석에 적용하기 위한 기초연구를 수행하였다.

CIP 법의 기본원리를 설명했고 CIP 법의 열유체 범용해법인 C-CUP 법을 이용해서 캐비티유동에서의 유동을 구해보았으며 갑자기 댐이 붕괴할 경우에 물과 공기의 다상 이동경계면의 거동해석을 수행해 보았다.

캐비티유동에서 점성력에 의한 유동을 해석한 결과는 SIMPLE 과의 비교를 통해서 신뢰성을 검증했으며 속도벡터로 나타낸 전체적인 유동은 SIMPLE 과 비교해 본 결과 경향이 잘 일치하는 결과를 얻었으며, 유선으로 표시한 그림에서도 전체적인 경향이 잘 일치하는 결과를 얻었다. 그러나 CIP 법으로 계산한 결과는 와동의 중심위치가 SIMPLE 의 경우보다 약갼 우상에 위치하는 정도의 차이가 나타났다.

갑자기 댐이 붕괴되는 경우에 물과 공기의 다상 이동경계면이 어떻게 형성되는가를 해석한다. 결과는 매우 단순한 경계조건의 부여에도 불구하고 기존의 결과와 좋은 일치를 보였다. 이와 같은 가능성은 복잡한 3 차원 자유표면문제에 적용시 극명하게 나타날 것으로 보이며, 이에 관해서는 향후 연구를 통하여 진행할 예정이다.

6. 참고문헌

1. F. H. Harlow and A. A. Amsden, "Numerical Calculation of Almost Incompressible Flow", J. Comput. Phys., Vol.3, pp.80-93, 1968
2. C. W. Hirt and B. D. Nichols, "Volume of fluid(VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries", J. Comput. Phys., Vol.39, pp.201-225, 1981
3. T. Yabe and T. Aoki, "Universal Solver CIP Method for Solid, Liquid and Gas", Simulation Engineering., Vol.1, No.1, pp.19-25, 1996 in Japanese
4. H. Takewaki, A. Nishiguchi and T. Yabe, "Cubic Interpolated Pseudo-particle Method (CIP) for Solving Hyperbolic-Type Equations", J. Comput. Phys., Vol.61, pp.261-268, 1985
5. Yabe T, Takei E, "A new higher-order Godunov method for general hyperbolic equations", J. Phys. Soc. Japan., Vol.57, pp.2598-2601, 1988
6. Yabe T, Ishikawa T, Kadota Y, Ikeda F "A multidimensional cubic-interpolated pseudo particle(CIP) method without time splitting technique for hyperbolic equations", J. Phys. Soc. Japan., Vol.59, pp.2301-2304, 1990
7. Yabe T, Aoki T "A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver", Comp. Phys. Commun., Vol.66, pp.219-232, 1991
8. Yabe T et al., "A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. Two-and three dimensional solvers". Comp.

Phys. Common., Vol.66, pp.233-242, 1991

9. B. D. NICHOLS AND C. W. HIRT, “Improved Free Surface Boundary Conditions for Numerical Incompressible-Flow Calculations”, J. Comput. Phys., Vol.8, pp.434-448, 1971

부록

1. C-CUP 법의 2 차원 코드설명

C-CUP 법을 설명한 2 차원에서의 보간함수의 식은 이동속도 $u < 0, v < 0$ 인 경우에만 사용할 수 있었다. 그러나 범용성을 가진 수치계산 프로그램에서는 당연히 이동속도의 부호에 상관없이 하나의 식을 가지고 계산할 수 있어야 하므로, 실제로 계산에 쓰이는 프로그램에서는 이동속도의 부호에 맞게 식이 구성되도록 먼저 몇 가지의 다른 변수를 사용해야 한다.

실제의 프로그램의 예를 들어서 설명하면 다음과 같다.

다음의 프로그램은 FORTRAN 으로 구성되었으며 CIP 법을 계산하는 subroutine DCIP 에서 사용된다.

```
dx2=dx*dx
dx3=dx2*dx
dy2=dy*dy
dy3=dy2*dy
do 130 j=1,ny
do 130 i=1,nx
xx=-u(i,j)*dt
yy=-v(i,j)*dt
```

isn=sign(1.0,u(i,j)): 이동속도의 부호에 상관없이 프로그램을 구성하기 위해서 사용되는 부분이 바로 이 부분이다.

sign 은 u(i,j)가 0 보다 크거나 같으면 앞의 숫자인 1.0 에 양의 부호를 취하며, u(i,j)가 0 보다 작으면 음의 부호를 취해서 isn 에 값을 할당하는 내장함수이다.

그러므로 u(i,j)**가** 0 **보다 크거나 같으면** isn=1.0 **이 되고**, 0 **보다 작으면** isn=-1.0 **이 된다**.

jsn=sign(1.0,v(i,j)): **위와 동일한 방법으로** jsn **에 값을 부여한다**.

im1=i-isn: **예를 들어서** *x* **방향의 속도** *u* **가** 0 **보다 큰 값이면** isn **에** 1.0 **이라는 값이 부여되었을 것이므로** im1 **은** i-1 **이 되어** *x* **방향에서** *i* **격자의 왼쪽의 방향에 위치하는** *i*-1 **의 위치가 된다**.

jm1=j-jsn: **위와 동일한 방법으로** jm1 **이 정의된다**.

```
a1=((gx(im1,j)+gx(i,j))*dx*isn-2.0d0*(f(i,j)-f(im1,j)))/(dx3*isn)
e1=(3.0d0*(f(im1,j)-f(i,j))+(gx(im1,j)+2.0d0*gx(i,j))*dx*isn)/dx2
b1=((gy(i,jm1)+gy(i,j))*dy*jsn-2.0d0* (f(i,j)-f(i,jm1)))/(dy3*jsn)
f1=(3.0d0*(f(i,jm1)-f(i,j))+(gy(i,jm1)+2.0d0*gy(i,j))*dy*jsn)/dy2
tmp=f(i,j)-f(i,jm1)-f(im1,j)+f(im1,jm1)
tmq=gy(im1,j)-gy(i,j)
d1=(-tmp-tmq*dy*jsn)/(dx*dy2*isn)
c1=(-tmp-(gx(i,jm1)-gx(i,j))*dx*isn)/(dx2*dy*jsn)
g1=(-tmq+c1*dx2)/(dx*isn)
fn(i,j)=((a1*xx+c1*yy+e1)*xx+g1*yy+gx(i,j))*xx+((b1*yy+d1*xx+f1)*yy+g
y(i,j))*yy+f(i,j)
gxn(i,j)=(3.0d0*a1*xx+2.0d0*(c1*yy+e1))*xx+(d1*yy+g1)*yy+gx(i,j)
gyn(i,j)=(3.0d0*b1*yy+2.0d0*(d1*xx+f1))*yy+(c1*xx+g1)*xx+gy(i,j)
```

2. 댐의 붕괴과정문제(broken dam)에서 지배방정식의 무차원화

4.2 절에서 소개된 지배방정식(식(97), 식(98), 식(99) 그리고 식(100))을 무차원화하기로 한다.

먼저 지배방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial r}{\partial t}+u\frac{\partial r}{\partial x}+v\frac{\partial r}{\partial y}=-r\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad (97)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x}-g \qquad (98)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (99)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}=-g\,p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad (100)$$

지배방정식을 무차원화하기 위해서는 먼저 기준량들을 설정해야 하는데 기준속도나 기준시간으로 이용할 수 있는 기준량이 없으므로 대표압력을 기준량으로 잡고 기준속도와 기준시간을 계산하면 기준량들을 다음과 같이 설정할 수 있다. 기준길이는 댐의 높이 h 를, 기준밀도는 물의 밀도 r_0 를 취했다.

기준량	표시
기준길이	$\bar{x} = h$
기준압력	$\bar{p} = r_0 g h = r_0 \bar{u}^2$
기준속도	$\bar{u} = \sqrt{gh}$
기준시간	$\bar{t} = \frac{h}{\sqrt{gh}}$

예를 들어 속도의 경우 무차원속도 $u^* = \frac{u}{\bar{u}}$ 과 같이 쓸 수 있고 무차원량은 *

로 나타내었고, 기준량은 문자 위에 bar 로 표시하였다.

표에서 나타낸 기준량들을 이용하여 지배방정식들을 무차원화하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial r^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial r^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial r^*}{\partial y^*} = -r^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \quad (97\text{-}1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} - 1 \quad (98\text{-}1)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \quad (99\text{-}1)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = -g\, p^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \quad (100\text{-}1)$$

무차원화시킨 식들과 유차원의 식들을 비교해 보면 무차원화를 했을 때 얻을 수 있는 장점인 변수가 소거되거나 줄어드는 경향을 발견할 수 없으며, 외관상 거의 동일하다. 따라서 무차원의 특별한 의미가 없으므로, 댐의 붕괴과정을 연구한 다른 논문에서는 유차원식으로 식을 전개하고 계산을 수행하는 것이 일반적이다. 물론 유차원에서 계산된 결과치는 위의 기준량을 이용해서 무차원화시킬 수 있으며 조건이 다른 결과와 쉽게 비교할 수 있다.

Abstract

A behavior analysis of multi-phase moving boundary

using the CIP method

Park Jun Hong

Dept. of Mechanical Engineering

The Graduate School

Kyung Hee Univ., KOREA

The CIP(Cubic-Interpolated Propagation) method which can solve together compressible and incompressible fluid is used to calculate multi-phase moving boundary. This method can treat solid, liquid and gas phases simultaneously and can trace a sharp interface even with one grid and provides a stable and less diffusive result even in a high-CFL computation

As test problem, C-CUP(CIP Combined Unified Procedure) was applied to cavity flow and broken dam, which have been verified by lots of numerical techniques and experiments.

In the cavity flow, the distribution of velocity calculated by the CIP method shows a good agreement with that of SIMPLE.

In the simulation on collapsing process of dam, exact and sharp boundary was obtained on flowing water, although simple boundary conditions are used only on the rectangular region not water-air interface.